

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier E. Stiefel

F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler

Redactor: R. Sängler

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

FUCHSHUBER, R.: Reihendarstellung axialsymmetrischer Geschwindigkeitskorrekturen und Strahldeformationen bei Windkanälen für den kompressiblen Unterschallbereich . . . . .	281
GYGAX, S.: Ein supraleitender Gleichspannungsverstärker für Helium-Temperaturen . . . . .	289
HERSCH, J.: Propriétés de convexité du type de Weyl pour des problèmes de vibration ou d'équilibre	298
HEYDA, J. F.: Green's Function for Laplace's Equation in a Circular Ring with Radiation Type Boundary Conditions . . . . .	322
JONES, J. R.: A Boundary-Layer in a Non-Newtonian Fluid . . . . .	328
REYNOLDS, A. J.: Energy Flows in a Vortex Tube . . . . .	343

## Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

BASULI, S.: Note on the Large Deflection of a Circular Plate under a Concentrated Load . . . . .	357
ROY, D.: Non-Steady Periodic Boundary Layer . . . . .	363
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	366

Z A M P

Vol. XII

Fasc. 4

Pag. 281-368

25. 7. 61

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redaktor/Editor/rédacteur: Prof. Dr. R. Sänger, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 12 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 8 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hiengegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten, welche einen Umfang von mehr als 16 Druckseiten aufweisen, haben einen *Satzbeitrag* zu entrichten. Dieser beträgt sFr. 30.- pro Seite von der 17. bis 24. Seite, sFr. 46.- pro Seite von der 25. bis 32. Seite und sFr. 57.- pro Seite von der 33. Seite an. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hand of the editor at least 12 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 8 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 printed pages are requested to pay a *contribution* of Sw.Frs. 30.- per page for pages 17-24, Sw. Frs. 46.- per page for pages 25-32, and Sw. Frs. 57.- per page for pages 33 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata printed without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: trois mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés huit semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. Le légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages imprimées, une *contribution* de frs.s. 30.- par page doit être payée pour les pages 17-24 et de frs.s. 46.- par page pour les pages 25-32; à partir de page 33 la contribution est de fr.s. 57.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement, Annual subscription, Abonnement annuel:

(6 Nummern, 6 issues, 6 numéros) sFr. 78.- (DM 78.-)

Einzelnummer, single copy, le numéro, sFr. 16.-

Inserate - Advertisements - Annonces:  $\frac{1}{4}$  Seite/page: sFr./DM 165.-,  $\frac{1}{2}$  Seite/page: sFr./DM 88.-  
 $\frac{3}{4}$  Seite/page: sFr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.



# Reihendarstellung axialsymmetrischer Geschwindigkeitskorrekturen und Strahldeformationen bei Windkanälen für den kompressiblen Unterschallbereich

VON ROLAND FUCHSHUBER, Nancy, France<sup>1)</sup>

## Übersicht

Behandelt man für den kompressiblen Unterschallbereich mit Hilfe der Prandtlschen Linearisierung Modellumströmungen in Windkanälen, so sind die an den Windkanalgrenzen auftretenden Randbedingungen zu berücksichtigen.

Es sei hier vorausgesetzt, dass die dem Modell zugehörige Strömung in einiger Entfernung von ihm in guter Approximation derjenigen einer gleichmässigen Quell-Senk-Kombination<sup>2)</sup>, eines Dipols oder einer einzelnen Quelle in einer Parallelströmung entspricht. Dann lassen sich die Wirkungen der endlichen Strahlgrenzen beim Windkanal nach der von PRANDTL-GLAUERT entwickelten Störungsmethode interpretieren, und zwar als eine Zusatzströmung, deren Geschwindigkeitspotential bei Überlagerung mit dem zum unbegrenzten Raum gehörigen Geschwindigkeitspotential die an den Strahlgrenzen auftretenden Bedingungen erfüllt.

Ausserdem lässt sich so beim Windkanal mit offener Meßstrecke (Freistrah) die durch das Modell verursachte Deformation der äusseren Stromlinie berechnen.

Eine mathematische Darstellung dieser Zusatzgeschwindigkeitspotentiale sowie der daraus resultierenden Zusatzgeschwindigkeiten und Strahldeformationen mit Hilfe von einseitigen Fourier-Transformationen findet sich bei FUCHSHUBER [1]<sup>3)</sup>.

In der Folge werden für eine Anzahl dieser Integraldarstellungen Reihenentwicklungen angegeben, welche die numerische Auswertung in den meisten Fällen wesentlich vereinfachen.

Zusätzlich sind einige dieser Reihenentwicklungen rechnerisch unter Verwendung eines Magnettrommel-Rechners vom Typ IBM-650 im «Institut Universitaire de Calcul Automatique» der Universität Nancy behandelt worden (Programmierung vom Verfasser).

<sup>1)</sup> Université de Nancy, Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique.

<sup>2)</sup> Das ist die Konfiguration einer Quelle und einer Senke gleicher Stärke auf der  $z$ -Achse, jeweils im Abstand  $l$  vom Koordinatennullpunkt.

<sup>3)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 288.

# 1. Berechnung der Geschwindigkeitspotentiale und der zugeordneten Geschwindigkeiten

Für das Gesamtgeschwindigkeitspotential der Modellumströmung ergibt sich an der festen Windkanalbegrenzung ( $\varrho = 1$ ) bei Ersetzung des Modells durch eine gleichmässige Quell-Senk-Kombination (Rankine-Oval) im rotationssymmetrischen Fall folgender Ausdruck:

$$\Phi_{ges}^{QSK} = \frac{U_0 V}{R^2} \frac{1}{2 \pi^2 \hat{\lambda} \beta^2} \int_0^\infty \frac{1}{p I_1(p)} \sin(\hat{\lambda} p) \sin(\hat{\zeta} p) dp^4. \quad (1)$$

Hierbei bedeuten:

$\zeta = z/R$  und  $\varrho = r/R$  reduzierte Zylinderkoordinaten,

$R$  = den Windkanalradius,

$\beta = \sqrt{1 - M^2}$  den Prandtl-Faktor, ( $M$  = Machzahl der Strömung ohne Modell),

$\lambda = l/R$  den reduzierten Abstand zwischen Quelle und Senke,

$U_0$  = die Anblasgeschwindigkeit,

$V$  = das Volumen des Modells,

$\hat{\zeta} = \zeta/\beta$ ;  $\hat{\lambda} = \lambda/\beta$ .

Die Bezeichnung der auftretenden Bessel-Funktionen erfolgt stets nach ERDELYI [2].

Der zugeordnete Ausdruck für die Gesamtgeschwindigkeit  $w_{ges}^{QSK} = \partial \Phi_{ges}^{QSK} / \partial z$  ergibt sich dann zu:

$$w_{ges}^{QSK} = \frac{U_0 V}{R^3} \frac{1}{2 \pi^2 \hat{\lambda} \beta^3} \int_0^\infty \frac{1}{I_1(p)} \sin(\hat{\lambda} p) \cos(\hat{\zeta} p) dp^4. \quad (2)$$

Benutzt man die nach ERDELYI [2], Gl. 7. 15 (64), abgeleitete Beziehung:

$$\frac{1}{I_1(t)} = \frac{2}{t} + 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{J_0(\gamma_{1,n})} \frac{t}{(t^2 + \gamma_{1,n}^2)}, \quad (3)$$

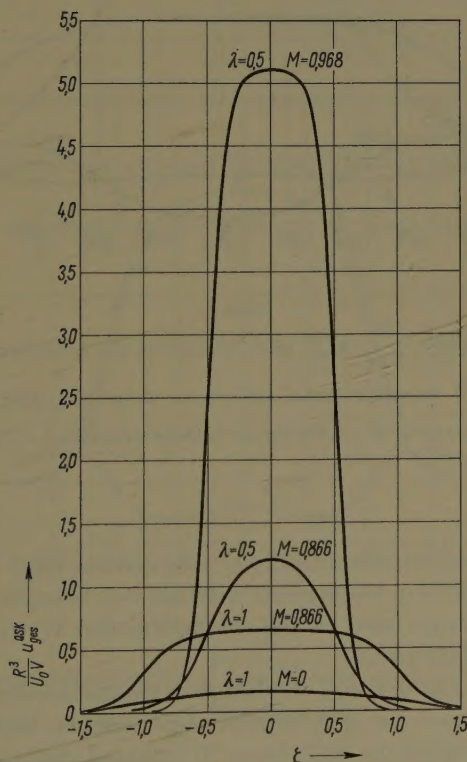
wobei  $\gamma_{1,n}$  die der Grösse nach  $n$ -te positive Wurzel der Gleichung  $J_1(t) = 0$  mit  $t > 0$  bedeutet, so findet man mit Hilfe von OBERHETTINGER [3] nach einigen Umformungen folgende Ergebnisse:

$$\Phi_{ges}^{QSK} = \frac{U_0 V}{R^2} \frac{1}{2 \pi \hat{\lambda} \beta^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[ \hat{\zeta} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{1,n} J_0(\gamma_{1,n})} e^{-\gamma_{1,n} \hat{\lambda}} \sinh(\gamma_{1,n} \hat{\zeta}) \right] \text{ für } 0 < \hat{\zeta} < \hat{\lambda}, \\ & \left[ \hat{\lambda} + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{1,n} J_0(\gamma_{1,n})} e^{-\gamma_{1,n} \hat{\zeta}} \sinh(\gamma_{1,n} \hat{\lambda}) \right] \text{ für } \hat{\lambda} < \hat{\zeta} < \infty; \end{aligned} \right.$$

<sup>4)</sup> Siehe [1], Gleichung III. 1. 14.

$$u_{ges}^{QSK} = \frac{U_0 V}{R^3} \frac{1}{2 \pi \hat{\lambda} \beta^3} \left\{ \begin{array}{l} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\gamma_{1,n})} e^{-\gamma_{1,n} \hat{\lambda}} \cosh(\gamma_{1,n} \hat{\zeta}) \right] \text{ für } \hat{\zeta} < \hat{\lambda} > 0, \\ \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\gamma_{1,n})} e^{-2\gamma_{1,n} \hat{\lambda}} \right] \text{ für } \hat{\zeta} = \hat{\lambda}, \\ \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_0(\gamma_{1,n})} e^{-\gamma_{1,n} \hat{\lambda}} \sinh(\gamma_{1,n} \hat{\lambda}) \right] \text{ für } \hat{\zeta} > \hat{\lambda}. \end{array} \right\} \quad (5)$$

In der Figur 1<sup>5)</sup> ist nach (5)  $u_{ges}^{QSK}$  für verschiedene Parameterwerte  $M$  und  $\lambda$  graphisch dargestellt. Erwartungsgemäss erkennt man, dass die Rand-



Figur 1

Randgesamtgeschwindigkeit  $\frac{R^3}{U_0 V} u_{ges}^{QSK}$  als Funktion von  $\zeta$  für die Parameterwerte

$\lambda = 0,5$  mit  $M = 0,866$  und  $M = 0,968$

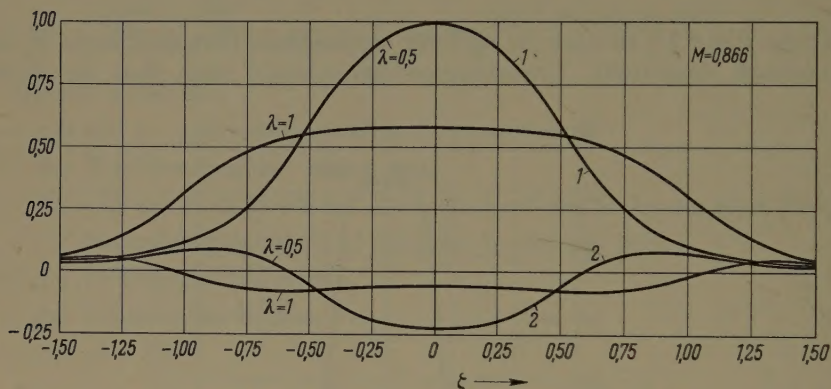
$\lambda = 1$  mit  $M = 0,866$  und  $M = 0$ .

<sup>5)</sup> Die angegebenen  $M$ -Werte stellen auf drei Stellen hinter dem Komma genaue Näherungen der bei der Rechnung verwendeten Werte dar.



gesamtgeschwindigkeit mit wachsendem  $M$  rasch ansteigt, während sie mit wachsendem  $\lambda$ , das heisst mit wachsendem Schlankheitsgrad des Rankine-Ovals, absinkt.

In der Figur 2 sind nach [1], Abschnitt IX, für verschiedene Parameterwerte  $\lambda$  bei festem  $M$  die Randzusatzgeschwindigkeiten  $u_{zus}^{QSK}$  für den Windkanal mit geschlossener Meßstrecke und  $u_{zus}^{*QSK}$  für den Windkanal mit offener



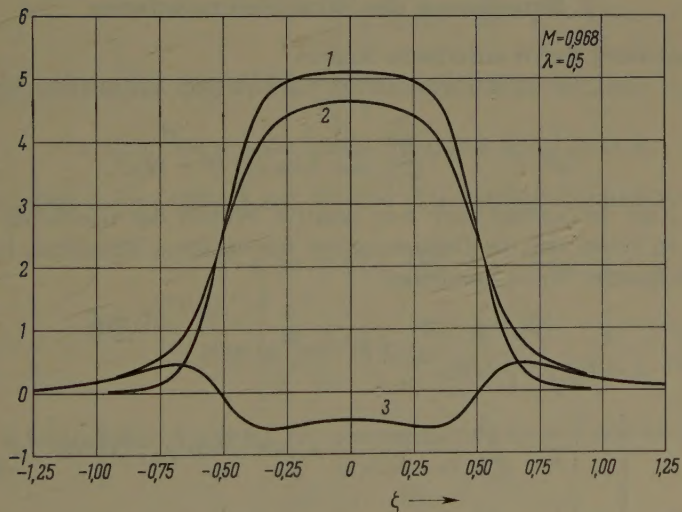
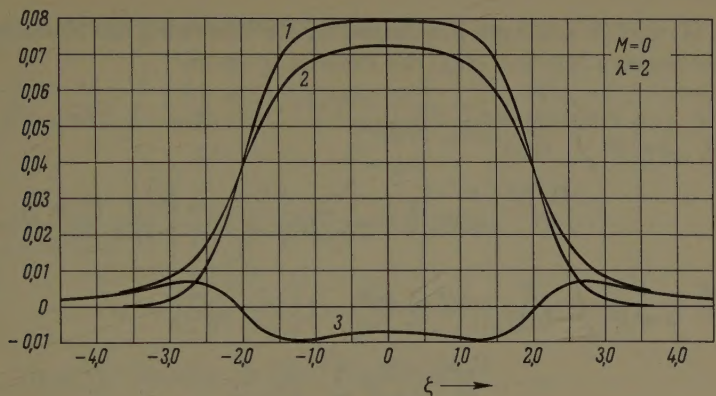
Figur 2

Randzusatzgeschwindigkeiten  $\frac{R^3}{U_0 V} u_{zus}^{QSK}$  beim Windkanal mit geschlossener Meßstrecke (Kurven 1) und  $\frac{R^3}{U_0 V} u_{zus}^{*QSK}$  beim Windkanal mit offener Meßstrecke (Kurven 2) als Funktionen von  $\xi$  bei konstantem  $M = 0,866$  für die Schlankheitsgrade  $\lambda = 0,5$  und  $\lambda = 1$ .

Meßstrecke graphisch dargestellt. Erwartungsgemäss zeigt sich, dass die absoluten Werte für die Randzusatzgeschwindigkeiten beim Windkanal mit offener Meßstrecke niedriger sind als die entsprechenden Werte beim Windkanal mit geschlossener Meßstrecke.

In den Figuren 3 und 4 sind die Randzusatzgeschwindigkeiten  $u_{zus}^{QSK}$  bzw.  $u_{zus}^{*QSK}$  beim Windkanal mit geschlossener bzw. offener Meßstrecke sowie die Randgesamtgeschwindigkeit  $u_{ges}^{QSK}$  beim Windkanal mit geschlossener Meßstrecke für die Parameterwerte  $M = 0$ ,  $\lambda = 2$  und  $M = 0,968$ ,  $\lambda = 0,5$  graphisch dargestellt. (Die Randgesamtgeschwindigkeit  $u_{ges}^{*QSK}$  beim Windkanal mit offener Meßstrecke verschwindet stets.)

Man erkennt deutlich wieder den bereits festgestellten Einfluss von  $M$  und  $\lambda$  sowie die grössere Empfindlichkeit des Windkanals mit geschlossener Meßstrecke gegenüber dem Freistrah.



Figuren 3 und 4

Kurven 1: Randgesamtgeschwindigkeiten  $\frac{R^3}{U_0 V} u_{ges}^{QSK}$  beim Windkanal mit geschlossener Meßstrecke als Funktionen von  $\zeta$ .

Kurven 2: Randzusatzgeschwindigkeiten  $\frac{R^3}{U_0 V} u_{zus}^{QSK}$  beim Windkanal mit geschlossener Meßstrecke als Funktionen von  $\zeta$ .

Kurven 3: Randzusatzgeschwindigkeiten  $\frac{R^3}{U_0 V} u_{zus}^{*QSK}$  beim Windkanal mit offener Meßstrecke als Funktionen von  $\zeta$ .

Figur 3:  $M = 0$ ;  $\lambda = 2$ .

Figur 4:  $M = 0,968$ ;  $\lambda = 0,5$ .

Die zu (4) und (5) analogen Ergebnisse für die Ersetzung des Modells durch einen Dipol ergeben sich mit Hilfe der Beziehung (3) zu:

$$\begin{aligned}\Phi_{ges}^D &= \frac{U_0 V}{R^2} \frac{1}{2 \pi^2 \beta^2} \int_0^\infty \frac{1}{I_1(p)} \sin(\hat{\zeta} p) dp^6 \\ &= \frac{U_0 V}{R^2} \frac{1}{2 \pi \beta^2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{J_0(\gamma_{1,n})} e^{-\gamma_{1,n} \hat{\zeta}} \right]; \quad (\hat{\zeta} > 0). \quad (6)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{ges}^D &= \frac{U_0 V}{R^3} \frac{1}{2 \pi^2 \beta^3} \int_0^\infty \frac{p}{I_1(p)} \cos(\hat{\zeta} p) dp^6 \\ &= -\frac{U_0 V}{R^3} \frac{1}{2 \pi \beta^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{\gamma_{1,n}}{J_0(\gamma_{1,n})} e^{-\gamma_{1,n} \hat{\zeta}}; \quad (\hat{\zeta} > 0). \quad (7)\end{aligned}$$

## 2. Berechnung der Strahldeformationen

a) Darstellung durch unendliche Reihen.

Benutzt man die nach ERDELYI [2], Gl. 7.15 (62), abgeleitete Beziehung:

$$\frac{1}{I_0(t)} = 1 - 2 \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{0,n} J_1(\gamma_{0,n})} \frac{t^2}{(t^2 + \gamma_{0,n}^2)}, \quad (8)$$

wobei  $\gamma_{0,n}$  die der Grösse nach  $n$ -te positive Wurzel der Gleichung  $J_0(t) = 0$  bedeutet, so lassen sich die Deformationen der äusseren Stromlinie beim Freistrah in folgender Weise darstellen:

$$\begin{aligned}\Delta \alpha^{QSK} &= \frac{V}{R^3} \frac{1}{2 \pi^2 \hat{\lambda} \beta} \int_0^\infty \frac{1}{p I_0(p)} \sin(\hat{\lambda} p) \cos(\hat{\zeta} p) dp^7 \\ &= \frac{V}{R^3} \frac{1}{2 \pi \hat{\lambda} \beta} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{0,n} J_1(\gamma_{0,n})} e^{-\gamma_{0,n} \hat{\lambda} \cosh(\gamma_{0,n} \hat{\zeta})} \right] \text{ für } \hat{\zeta} < \hat{\lambda} > 0 \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{0,n} J_1(\gamma_{0,n})} e^{-2\gamma_{0,n} \hat{\lambda}} \right] \text{ für } \hat{\zeta} = \hat{\lambda} \right. \\ &\quad \left. \left[ \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{0,n} J_1(\gamma_{0,n})} e^{-\gamma_{0,n} \hat{\zeta} \sinh(\gamma_{0,n} \hat{\lambda})} \right] \text{ für } \hat{\zeta} > \hat{\lambda} \right\}\end{aligned}$$

Das hier auftretende Integral ist im wesentlichen von BERTRAM [4] tabuliert und von LENZ [5] mit Hilfe des Liebmannschen Maschenverfahrens für  $\hat{\lambda} = \lambda/\beta = 1/3; 1/2; 1; 2; 5$  bei konstantem  $\lambda$  als Funktion von  $\zeta/2\lambda$  sowie für  $\hat{\lambda} = \lambda/\beta = 0$  [Dipol-Problem, siehe Gleichung (10)];  $1/2; 1; 2; 5$  bei konstantem  $\beta$ .

<sup>6)</sup> Siehe [1], Gleichung IV.1.2.

<sup>7)</sup> Siehe [1], Gleichung VI.1.7.



als Funktion von  $\zeta/2\beta$  berechnet worden.

$$\Delta_{\alpha}^D = \frac{V}{R^3} \frac{1}{2\pi^2\beta} \int_0^{\infty} \frac{1}{I_0(p)} \cos(\hat{\zeta} p) dp^8 = \frac{V}{R^3} \frac{1}{2\pi\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\gamma_{0,n})} e^{-\gamma_{0,n}\hat{\zeta}}; \quad (\hat{\zeta} > 0). \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha}^Q &= -\frac{m_r}{U_0 R^2} \frac{1}{2\pi^2} \left[ \frac{\pi}{2} + \int_0^{\infty} \frac{1}{p I_0(p)} \sin(\hat{\zeta} p) dp \right]^9 \\ &= -\frac{m_r}{U_0 R^2} \frac{1}{2\pi} \left[ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{0,n} J_1(\gamma_{0,n})} e^{-\gamma_{0,n}\hat{\zeta}} \right]; \quad (\hat{\zeta} > 0) \end{aligned} \quad (11)$$

$m_r$ : Quell-Stärke.

Beachtet man weiterhin die nach SNEDDON [6] abgeleitete Beziehung:

$$\lim_{M \rightarrow 1} \int_0^{\infty} \frac{1}{p} f(p) \sin(\hat{\lambda} p) \cos(\hat{\zeta} p) dp = \begin{cases} \frac{\pi}{2} f(+0) & \text{für } \lambda > |\zeta| \\ \frac{\pi}{4} f(+0) & \text{für } \lambda = |\zeta| \\ 0 & \text{für } \lambda < |\zeta|; \quad (\lambda > 0), \end{cases} \quad (12)$$

so ergeben sich in Verbindung mit (9) und (11) folgende Grenzwerte:

$$\lim_{M \rightarrow 1} \Delta_{\alpha}^{QSK10} = \begin{cases} \frac{V}{R^3} \frac{1}{4\pi\lambda} & \text{für } \lambda > |\zeta|, \\ \frac{V}{R^3} \frac{1}{8\pi\lambda} & \text{für } \lambda = |\zeta|, \\ 0 & \text{für } \lambda < |\zeta|; \quad (\lambda > 0). \end{cases} \quad (13)$$

[Der entsprechende Ausdruck für das zugehörige ebene Problem lautet zum Vergleich:

$$\lim_{M \rightarrow 1} \Delta_{\alpha}^{QSK11} = \begin{cases} \frac{F}{H^2} \frac{1}{4\lambda} & \text{für } \lambda > |\zeta|, \\ \frac{F}{H^2} \frac{1}{8\lambda} & \text{für } \lambda = |\zeta|, \\ 0 & \text{für } \lambda < |\zeta|; \quad (\lambda > 0). \end{cases} \quad (14)$$

$F$ : Flächeninhalt der Modellkontur;  $H$ : Windkanalhöhe.]

<sup>8)</sup> Diese Beziehung findet sich bei G. SCHMITZ, Rechnungen zur Kanalkorrektur bei geschlossener und offener Meßstrecke, Forschungsbericht Nr. 820074 der Luftforschungsanstalt Braunschweig (1944), sowie im wesentlichen auch in [5], Gleichung (79, 14).

<sup>9)</sup> Strahldeformation bei Ersetzung des Modells durch eine einzige Quelle. Siehe [1], Gleichung VIII.1.2, sowie [5], Gleichung (86, 13).

<sup>10)</sup> Siehe auch [5], Gleichung (79,15).

<sup>11)</sup> Siehe [1], Gleichung VI.2.5.

$$\lim_{M \rightarrow 1} \Delta \alpha^0 [6] = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{m_r}{U_0 R^2} \frac{1}{2\pi} & \text{für } \zeta > 0, \\ -\frac{m_r}{U_0 R^2} \frac{1}{4\pi} & \text{für } \zeta = 0, \\ 0 & \text{für } \zeta < 0. \end{array} \right\} \quad (15)$$

b) Geschlossene Darstellung durch analytische Näherungsfunktionen.

Für die Strahldeformationen in (9), (10) und (11) hat man bereits eine Reihe von geschlossenen analytischen Näherungsformeln aufgestellt.

So ergibt sich zum Beispiel nach LENZ [7]:

$$\Delta \alpha^{QSK} \approx \frac{V}{R^3} \frac{1}{4\pi \hat{\lambda} \beta} \tanh\left(\frac{\gamma_{0,1}}{2} \hat{\lambda}\right) \left[ \frac{1 - \tanh^2\left(\frac{\gamma_{0,1}}{2} \hat{\zeta}\right)}{1 - \tanh^2\left(\frac{\gamma_{0,1}}{2} \hat{\lambda}\right) \tanh^2\left(\frac{\gamma_{0,1}}{2} \hat{\zeta}\right)} \right], \quad (16)$$

wobei hiernach im wesentlichen  $\Delta \alpha^{QSK}$  für  $\hat{\lambda} = \lambda/\beta = 0$  [Dipolproblem, siehe Gleichung (17)]; 1; 2; 5, bei konstantem  $\beta$  als Funktion von  $\hat{\zeta}/2$  graphisch wiedergegeben wird.

Dividiert man in (16) auf beiden Seiten durch  $\hat{\lambda}$  und führt man dann auf beiden Seiten den Grenzübergang  $\lim_{\lambda \rightarrow 0}$  durch, so folgt wegen  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Delta \alpha^{QSK} = \Delta \alpha^D$  nach elementarer Rechnung:

$$\Delta \alpha^D \approx \frac{V}{R^3} \frac{\gamma_{0,1}}{8\pi \beta} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\gamma_{0,1}}{2} \hat{\zeta}\right). \quad (17)$$

Diese Beziehung wurde im wesentlichen zuerst von GRAY [8] angegeben, allerdings mit  $\gamma_{0,1} = 2,64$  ( $\gamma_{0,1} = 2,4048$ ). Sie findet sich weiterhin bei BERTRAM [4], p. 497 (dortige Fussnote 3).

Schliesslich ergibt sich, etwa nach LENZ [7], S. 126, Gl. (16) und Gl. (17), die Näherung:

$$\Delta \alpha^0 \approx -\frac{m_r}{U_0 R^2} \frac{1}{4\pi} \left[ 1 + \tanh\left(\frac{\gamma_{0,1}}{2} \hat{\zeta}\right) \right]. \quad (18)$$

GLASER [5] (S. 317, Abb. 234, Kurve II) gibt im wesentlichen den graphischen Verlauf von  $\Delta \alpha^0$  nach (18) als Funktion von  $\hat{\zeta}/2$  wieder.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] R. FUCHSHUBER, *Etude mathématique de l'influence des dimensions finies de la veine d'air autour d'un modèle, dans les souffleries, pour le domaine de l'écoulement compressible subsonique*; Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Paris (im Druck).
- [2] A. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER und F. G. TRICOMI, *Higher Transcendental Functions* (McGraw-Hill, New York 1953), Vol. 2.



- [3] F. OBERHETTINGER, *Tabellen zur Fourier-Transformation* (Springer-Verlag, 1957).
- [4] S. BERTRAM, *Calculation of Axially Symmetric Fields*, J. appl. Phys., 13, 498, Tab. II.
- [5] W. GLASER, *Grundlagen der Elektronenoptik* (Springer-Verlag, Wien, 1952), Gl. (79, 12) sowie Abb. 191 und 192.
- [6] I. N. SNEDDON, *Fourier-Transforms* (McGraw-Hill, New York, 1951), Gl. 3 (28).
- [7] F. LENZ, *Annäherung von rotationssymmetrischen Potentialfeldern mit zylindrischen Äquipotentialflächen durch eine analytische Funktion*; Ann. Phys., 8, 126, Gl. (19) sowie S. 127, Abb. 2.
- [8] F. GRAY, Bell Syst. Techn. J., 18, 1 (1939).

### *Résumé*

Dans les souffleries à veine fermée ou libre, il faut tenir compte des corrections de vitesse et des déformations de la ligne extérieure de courant, dues aux conditions aux limites.

Pour l'écoulement compressible subsonique, ces corrections et déformations sont représentées aux limites, dans le cas d'une symétrie de révolution, par des développements en série.

Certains de ces résultats, après traitement numérique sur une calculatrice électronique, sont représentés graphiquement.

(Eingegangen: 26. Oktober 1960.)

## Ein supraleitender Gleichspannungsverstärker für Helium-Temperaturen

Von SUSO GYGAX, Zürich<sup>1)</sup>

### Einleitung

Die Messung sehr kleiner Gleichspannungen bei Heliumtemperatur stösst auf etliche Schwierigkeiten. Man kann wohl mit einem Galvanometerverstärker [1, 2, 3, 4]<sup>2)</sup> Spannungen bis zu  $10^{-9}$  Volt messen, doch stören die in den Zulieferungen auftretenden Thermospannungen beträchtlich. Durch Umpolen der Meßspannung mit einem Polwandler nach TEMPLETON [5] kann eine Differenzmessung ausgeführt und die Thermospannung eliminiert werden. Dieses Verfahren wird jedoch um so schlechter, je kleiner die zu messende Spannung wird. PIPPARD und PULLAN [6] messen die Spannung direkt mit einem supraleitenden Galvanometer, dessen Konstruktion jedoch enorme Schwierigkeiten

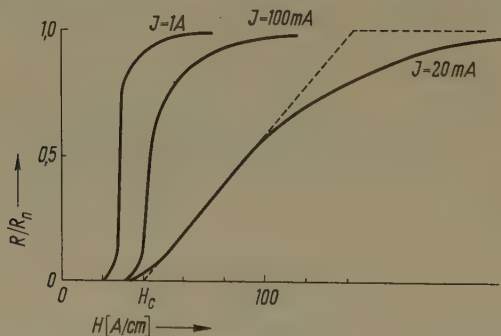
<sup>1)</sup> Institut für Kalorische Apparate und Kältetechnik, Eidg. Technische Hochschule, Zürich.

<sup>2)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 297.

bereitet. Die wohl eleganteste Methode hat TEMPLETON [7] gefunden, bei der die Meßspannung bereits bei Heliumtemperatur so weit verstärkt wird, dass die Thermospannungen der Zuleitungen keine Rolle mehr spielen. TEMPLETON und auch DE VROOMEN und VAN BAARLE [8], welche das Verfahren weiterausgebaut haben, benutzen dazu einen supraleitenden Modulator, bei dem ein supraleitender Draht im Messkreis mittels eines periodischen Magnetfeldes die Gleichspannung zuerst zerhackt, worauf sie dann wechselstrommässig hinauftransformiert und mit den üblichen elektronischen Methoden gemessen wird. Doch sind besondere Massnahmen notwendig, um den Einfluss der Streufelder vom Modulator zu eliminieren. Anstelle dieses magnetischen Verfahrens kann man auch einen Wärmehopper verwenden, wie er von uns entwickelt wurde [9]. Dass es jedoch auch möglich ist, bei Heliumtemperaturen gleichspannungsmässig zu verstärken, soll die vorliegende Arbeit zeigen.

### Arbeitsweise und Aufbau

Die prinzipielle Arbeitsweise dieses Verstärkers, der die Übergangskurve eines stromdurchflossenen Supraleiters im longitudinalen Magnetfeld benutzt, wurde schon früher mitgeteilt [10]. Solche Übergangskurven an Drähten von 0,3 mm  $\varnothing$  einer 8%-Pb-92%-In-Legierung bei 4,00° K für verschiedene Belastungsströme zeigt Figur 1. Man bringe nun durch ein konstantes Magnet-



Figur 1

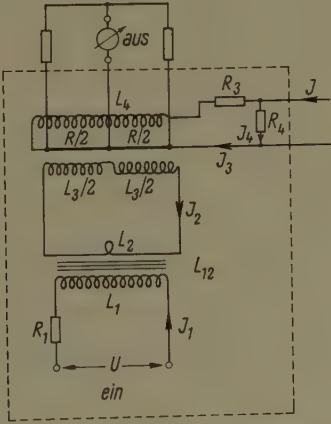
- Widerstandsprungkurven von 8 At% Pb in In im longitudinalen Magnetfeld bei verschiedenen Belastungsströmen. Drahtdurchmesser: 0,3 mm.  
 ----- Lineare Approximation des Zwischenzustandes  $R = \alpha (H - H_c)$ .

feld geeigneter Grösse den Supraleiter in die Mitte des Zwischenzustandes. Jede zusätzliche Feldänderung wird dann eine Widerstandsänderung bewirken, die gemessen werden kann. Diese kleinen Zusatzfelder sollen nun durch die zu messende Spannung erzeugt werden.

Figur 2 zeigt die von uns benutzte Schaltung. Die Meßspannung liegt an der Primärseite eines Transformators, dessen Sekundärkreis völlig supraleitend



ist. Ein solcher Transformator arbeitet als Gleichstromtransformator: im Sekundärkreis wird ein Strom induziert, der proportional zum Primärstrom ist und wegen dem verschwindenden Widerstand nicht abklingt, solange dieser Primärstrom konstant bleibt. Durch geeignete Dimensionierung des Transformators kann man somit den aus der Meßspannung gespiesenen, sehr kleinen Gleichstrom zu beträchtlichen Werten proportional verstärken und in den Spulen  $L_3$  zur Erzeugung von Zusatzfeldern verwenden. Diese beiden ungleichsinnig gewickelten Spulen liegen je über einer Hälfte eines im Zwischenzustand befindlichen supraleitenden Drahtes. Der Zwischenzustand wird erzeugt durch das Feld, das vom Belastungsstrom des Supraleiters in der Spule  $L_4$  herrührt. Ein Galvanometer liegt so über dem Supraleiter, dass es keinen Ausschlag zeigt, solange die zwei Hälften des Drahtes denselben Widerstand haben. Erst wenn durch die Zusatzfelder der eine Widerstand kleiner und damit der andere gleichzeitig grösser gemacht wird, liegt am Galvanometer eine Spannung.



Figur 2  
Verstärkerschaltung. Der eingefasste Teil befindet sich im Helium.

**Spannungsverstärkung**

Für die Spannungsverstärkung bekommt man (siehe Figur 2):

$$v = \frac{\partial V}{\partial U} = \frac{\partial V}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial U}$$

mit  $V$  als Ausgangsspannung.

Der erste Faktor wird einfach, wenn man das ganze Zwischenzustandsgebiet durch einen linearen Anstieg approximiert. Da wir in der Mitte des Zwischenzustandes arbeiten, darf man dies, wie Figur 1 zeigt, sicher tun. Für

$H_c < H < H_n$  schreiben wir also:  $R = \alpha (H - H_c)$  und somit für die Spannung:  $V = \alpha (H - H_c) J_3$ . Das in den Spulen  $L_3/2$  von  $J_2$  erzeugte Zusatzfeld ist  $H = 1/2 n_3 J_2$  mit  $n_3 = N_3/l$  (Windungen/Längeneinheit). Also wird jetzt:

$$\frac{\partial V}{\partial J_2} = \alpha n_3 J_3.$$

Der zweite Faktor berechnet sich dann aus der Transformatorgleichung

$$L_{12} \dot{J}_1 = (L_2 + L_3) \dot{J}_2$$

(wo  $L_{12} = k\sqrt{L_1 L_2}$  die Gegeninduktivität und  $k$  der Kopplungsfaktor) zu:

$$\frac{\partial J_2}{\partial J_1} = \frac{L_{12}}{L_2 + L_3} = k \frac{1}{\sqrt{\frac{L_2}{L_1} + k \frac{L_3}{L_{12}}}}.$$

Besitzt die Spannungsquelle  $U$  einen verschwindend kleinen Innenwiderstand gegenüber dem Eingangswiderstand  $R_1$ , so wird

$$\frac{\partial J_1}{\partial U} = \frac{1}{R_1}$$

und somit die Spannungsverstärkung:

$$v = \frac{\alpha k n_3 J_3}{R_1 \left( \sqrt{\frac{L_2}{L_1} + k \frac{L_3}{L_{12}}} \right)}.$$

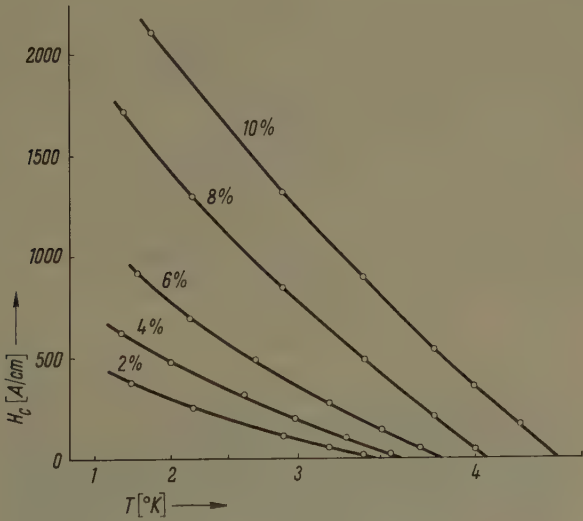
Um nun eine gute Verstärkung zu erhalten, wird man eine möglichst grosse Steilheit  $\alpha$  der Sprungkurve anstreben und mit einem grossen Belastungsstrom  $J_3$  arbeiten. Figur 1 zeigt, dass die beiden Bedingungen miteinander gehen: je grösser der Belastungsstrom, desto steiler die Sprungkurve. Benutzt man statt einer reinen Substanz eine Legierung, so kann man einen hohen Restwiderstand erwarten, was wiederum die Steilheit vergrössert. Zudem kann das kritische Feld durch Zulegieren geändert werden: ein höheres kritisches Feld bedingt in unserer Anordnung einen höheren Belastungsstrom. Figur 3 zeigt die kritischen Feldkurven der von uns benutzten In-Pb-Legierungsreihe. Als «kritisches Feld»  $H_c$  wurde hier der Schnittpunkt des linearen Teils des Widerstandsanstiegs mit der Feldachse bezeichnet (siehe auch Figur 1).

Für die Dimensionierung der Induktivitäten erhält man folgende Forderungen:  $L_1 \gg L_2$  oder  $N_1 \gg N_2$ , das heisst die Primärwicklung des Transformators soll sehr viel grösser sein als die Sekundärwicklung, und die Kopplung soll möglichst gut sein ( $k \simeq 1$ ). Man wird somit als Kern ein Transformatoreisen mit grosser Permeabilität verwenden müssen. Das erleichtert auch die



Erfüllung der Bedingung  $L_{12} \gg L_3$ , welche besagt, dass die Zusatzspulen gegenüber  $L_{12}$  eine kleine Induktivität haben sollen.

Ferner soll noch  $R_1$ , der Eingangswiderstand des Verstärkers klein sein. Dem sind bei einer Spannungsmessung Grenzen gesetzt: der Eingangswiderstand sollte ungefähr  $10^3$ mal grösser sein als der Widerstand, über dem die Spannung gemessen wird. Immerhin wird man bei Thermo- und Hallspannungsmessungen  $R_1$  sehr klein halten können ( $\sim 10^{-5} \Omega$ ).



Figur 3  
Kritische Feldkurven der Legierungsreihe In-Pb.

**Nullpunktstabilität**

Der erreichbare Verstärkungsgrad hängt wesentlich davon ab, wie genau der Betriebspunkt im Zwischenzustandsgebiet zeitlich festgehalten werden kann. Solange er sich auf dem linearen Teil der Übergangskurve bewegt, spielt das bei unserer Anordnung keine Rolle. Erst wenn längs des Drahtes Asymmetrien im Widerstand auftreten, wird sich der Nullpunkt unserer Anordnung verschieben. Solche Nullpunktschwankungen können sich ergeben: 1. bei Verwendung von harten Supraleitern, die, wie unsere Untersuchungen an Ta ergeben haben, im Zwischenzustand sehr unstabil sind (siehe auch JUSTI [11] und BAIRD [12]); 2. wenn sich über dem Draht ein Temperaturgradient ausbildet; 3. bei Anwesenheit von äusseren Störfeldern und 4. durch Schwankungen des Belastungsstromes.

1. kann weitgehend umgangen werden durch Verwendung eines weichen Supraleiters, zum Beispiel einer passenden, gut getemperten Legierung; 2. scheint bei uns nicht aufzutreten, und 3. kann durch eine Bleiabschirmung vermieden werden. 4. Die Schwankungen des Belastungsstromes können beträchtlich herabgesetzt werden, wenn man, wie aus Figur 2 ersichtlich, parallel zu Draht und Feldspule einen passenden Widerstand schaltet. Man sieht leicht ein, dass dieser kleiner oder mindestens von derselben Grössenordnung sein soll wie  $R + R_3$ . Wegen

$$J_3 = J \frac{R_4}{R(J_3) + R_3 + R_4}$$

wird mit unserer linearen Approximation für das Zwischenzustandsgebiet und speziell für den Betriebspunkt  $R = 1/2 R_n$ :

$$\partial J_3 = \partial J \frac{1}{\frac{R_n + R_3}{R_4} + \frac{\alpha H_c}{R_4} + 1}.$$

Für kleine Schwankungen muss also in der Tat gelten:

$$R_4 \ll R_n + R_3.$$

### Ansprechzeit

Wegen des kleinen Eingangswiderstands und der relativ grossen Induktivitäten ist eine grosse Relaxationszeit zu erwarten. Man findet:

$$\tau = \frac{L_1}{R_1} \left[ \frac{L_2 + L_3 - k^2 L_2}{L_2 + L_3} \right] = \frac{L_1}{R_1} \left[ \frac{(1 - k^2) L_2 / L_3 + 1}{L_2 / L_3 + 1} \right].$$

Für ideale Kopplung ( $k = 1$ ) und  $L_2 \gg L_3$ , das heisst hohe Permeabilität, wird:

$$\tau \approx \frac{L_1}{R_1} \frac{L_3}{L_2}.$$

Um einen grossen Verstärkungsgrad zu erhalten, soll das Verhältnis  $L_1/L_2$  gross und der Eingangswiderstand  $R_1$  klein sein. Diese Forderungen führen aber gleichzeitig zu einer langen Ansprechzeit. Ein grosser Verstärkungsgrad kann somit nur auf Kosten einer langen Ansprechzeit erreicht werden. Ein Vergleich dieser beiden Grössen ergibt:

$$\varepsilon = \frac{\tau}{v} = \frac{1}{\alpha k n_3 J_3} \frac{(1 - k^2) L_2 + L_3}{\sqrt{L_2/L_1}}$$

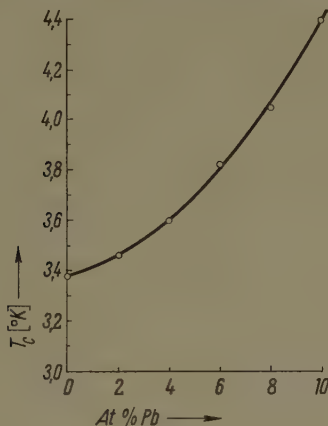
und im Fall idealer Kopplung:

$$\varepsilon = \frac{\tau}{v} = \frac{L_3}{\alpha n_3 J_3 \sqrt{L_2/L_1}}.$$



## Praktische Ausführung

Da wir bei 4,00° K arbeiten wollen, benutzen wir als magnetempfindliches Element eine Legierung aus 8 At% Pb in In. Für diese Legierungsreihe ist der Verlauf der kritischen Temperatur mit der Pb-Konzentration in Figur 4 auf-



Figur 4

Verlauf der kritischen Temperatur in der Legierungsreihe In-Pb.



Figur 5

Verstärker auseinandergenommen. Von links nach rechts: Trafo, supraleitender Draht mit den 3 Potentialsonden, Zusatzspulen  $L_3$ , Feldspule  $L_4$ .

gezeichnet (siehe auch [13]). Dieser weiche Supraleiter hat gegenüber In bessere mechanische Eigenschaften und gegenüber Ta den Vorteil, dass er sich löten lässt. Mittels Pressen durch eine Düse wurde ein Draht von 0,3 mm  $\varnothing$  erhalten. 3 Potentialsonden aus dünnem Kupferdraht wurden mit je 1,5 cm Abstand angelötet (siehe Figur 5).

Direkt über dem Draht befinden sich die einlagigen Zusatzspulen  $L_3$ , die aus Lötzinndraht (50% Pb – 50% Sn) von 2 mm  $\varnothing$  bestehen und je 2 cm

lang sind. Auch diese Legierung ist supraleitend und besitzt bei  $4,00^\circ \text{K}$  ein kritisches Feld von zirka 500 Amp/cm. Über diesen Spulen befindet sich eine Nb-Feldspule mit Innendurchmesser 7 mm, Drahtdurchmesser 0,3 mm, Spulenlänge 5 cm und  $N/l = 135 \text{ Wdg/cm}$ . Anstelle von Nb kann man aber auch einen dünnen Lötzinndraht nehmen, dessen kritisches Feld ja genügend gross ist, um die Spule supraleitend zu halten; zudem kann man dann leicht löten. Der Transformatorkern besteht aus Eisenblechen, das Windungsverhältnis ist  $N_1/N_2 = 700/1$ . Der Sekundärkreis besteht völlig aus supraleitendem Lötzinndraht, die Primärwicklung aus Nb mit 0,3 mm  $\varnothing$ . In den Sekundärkreis haben wir einen einfachen Schalter eingebaut: Über einem kurzen Stück des supraleitenden Drahtes wurde eine Heizwicklung angebracht. Dadurch kann man einen Widerstand in den Kreis schalten, und ein eventuell vorhandener Dauerstrom wird aussterben. Zudem besteht damit die Möglichkeit nachzuweisen, dass eine Ausgangsspannung wirklich durch das Einschalten eines Meßstromes im Eingangskreis entsteht, und nicht durch irgendwelche Magnetfelder.

Den Verstärker wird man mit Vorteil als Nullinstrument verwenden. Man erreicht dies einfach, indem man eine Kompensationsspannung über einen geeichten Widerstand in den Eingangskreis schaltet.

Die von uns verwendeten Widerstände und die aus der Geometrie berechneten Induktivitäten haben folgende Werte:

$$\begin{aligned} R_1 &= 8 \cdot 10^{-5} \Omega, & R_n &= 1,2 \cdot 10^{-2} \Omega, & R_3 &= 1,1 \cdot 10^{-3} \Omega, & R_4 &= 1,4 \cdot 10^{-3} \Omega, \\ N_1 &= 700 \text{ Wdg}, & N_2 &= 1 \text{ Wdg}, & N_3 &= 15 \text{ Wdg}, & \mu &\sim 50, \\ L_1 &\sim 3 \cdot 10^{-1} \text{ Hy}, & L_2 &\sim 5 \cdot 10^{-6} \text{ Hy}, & L_3 &\sim 7 \cdot 10^{-8} \text{ Hy}. \end{aligned}$$

Mit diesen Daten berechnen sich die einzelnen Faktoren des Verstärkungsgrades:

$$\frac{\partial V}{\partial J_2} = 2,8 \cdot 10^{-3} \Omega \quad (\text{gemessen: } 1,2 \cdot 10^{-3} \Omega)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial J_1} = 2,5 \cdot 10^2 \quad (\text{gemessen: } 1,1 \cdot 10^2)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial U} = 1,2 \cdot 10^4 \Omega^{-1}.$$

Damit bekommt man für  $\partial V/\partial U = 8,4 \cdot 10^3$  anstelle des gemessenen Wertes von  $1,6 \cdot 10^3$ . Die wirklichen Induktivitätswerte sind somit etwas verschieden.

Die Nullpunktschwankungen am Ausgang wurden zu  $\sim 0,5 \mu \text{V}$  gemessen; dies ergibt auf den Eingang reduziert:  $\sim 10^{-9} \text{V}$ . Die Relaxationszeit war  $\frac{1}{2} \text{min}$ , was der Berechnung entspricht.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass man einen einfachen, kleinen Gleichspannungsverstärker für Heliumtemperaturen bauen kann, der zusam-

men mit einem üblichen Galvanometer Spannungen bis zu  $10^{-9}$  V misst, bei einer Relaxationszeit von  $\frac{1}{2}$  min. Eine Steigerung der Verstärkung durch passende Wahl der Induktivitätswerte würde eine Vergrößerung der Relaxationszeit bewirken und ist deshalb wohl kaum wünschenswert. Nur eine Vergrößerung der Steilheit der Übergangskurve hat keine Auswirkung auf die Ansprechzeit, doch müssen dann gleichzeitig die Nullpunktschwankungen herabgesetzt werden. Ferner ist zu beachten, dass dieser Typ nur bei einer bestimmten, festen Temperatur arbeitet und zudem noch gegen äussere Felder abgeschirmt werden muss. Will man die Temperatur ändern können, muss man den Verstärker in ein separates, kleines Dewar einbauen.

Ich möchte Herrn Prof. Dr. P. GRASSMANN, Leiter des Instituts für Kalorische Apparate und Kältetechnik an der ETH, für sein ständiges förderndes Interesse an dieser Arbeit danken. Mein Dank gilt auch Herrn PD Dr. J. L. OLSEN für die fruchtbaren Diskussionen und Ratschläge.

Die Untersuchungen wurden durch einen Arbeitsbeschaffungskredit des Bundes ermöglicht.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] J. S. PRESTON, J. Sci. Instr. 23, 173 (1946).
- [2] D. K. C. MAC DONALD, J. Sci. Instr. 24, 232 (1947).
- [3] D. K. C. MAC DONALD, *Handbuch der Physik*, Bd. XIV, S. 159ff. (Springer Verlag 1956).
- [4] J. L. OLSEN, Helv. Phys. Acta 31, 713 (1958).
- [5] I. M. TEMPLETON, J. Sci. Instr. 32, 172 (1955).
- [6] A. B. PIPPARD, G. T. PULLAN, Proc. Cambr. Phil. Soc. 48, 188 (1952).
- [7] I. M. TEMPLETON, J. Sci. Instr. 32, 314 (1955).
- [8] A. R. DE VROOMEN, C. VAN BAARLE, Physica 23, 785 (1957).
- [9] S. GYGAX, erscheint demnächst.
- [10] S. GYGAX, Helv. Phys. Acta 31, 287 (1958).
- [11] E. JUSTI, Ann. d. Phys. 42, 84 (1942).
- [12] D. C. BAIRD, Canad. J. Phys. 4, 5 (1959).
- [13] W. MEISSNER, H. FRANZ, H. WESTERHOFF, Ann. d. Phys. 13, 505 (1932).

#### Summary

A simple DC Voltage Amplifier using the resistive transition curve of a superconducting wire of 8% Pb in In is described. This wire is held in the intermediate state by a constant magnetic field. The small current from the measuring voltage is amplified by a superconducting transformer and used to build up a small additional field over the wire which in turn changes its resistance. This change in resistance is measured by a conventional potential drop technique with an ordinary galvanometer. The sensitivity of that device is  $10^{-9}$  Volt. It is limited by zero point fluctuations caused by instabilities of the intermediate state.

(Eingegangen: 14. November 1960.)



# Propriétés de convexité du type de WEYL pour des problèmes de vibration ou d'équilibre

PAR JOSEPH HERSCH, Genève<sup>1)</sup>

## Table des matières

§ 1. Equations de STURM-LIOUVILLE . . . . .	298
§ 2. Membrane vibrante inhomogène . . . . .	307
§ 3. Equation de SCHRÖDINGER . . . . .	309
§ 4. Plaque vibrante encastrée inhomogène . . . . .	312
§ 5. Problèmes du type de POISSON . . . . .	314
§ 6. Interprétations physiques . . . . .	317
Post-scriptum . . . . .	320
Bibliographie . . . . .	321
Summary . . . . .	322

## § 1. Equations de Sturm-Liouville

1.1. Nous considérons, dans un intervalle  $a < x < b$ , l'équation

$$L[u] \equiv (p(x)u')' - q(x)u + \lambda \varrho(x)u = 0, \quad (1)$$

où les fonctions  $q(x)$  et  $\varrho(x)$  sont continues par morceaux,  $p(x)$  est continue et est dérivable par morceaux,  $p(x) > 0$ ,  $\varrho(x) \geq 0$ ; la masse totale  $\int_a^b \varrho(x) dx$  est supposée positive; et les conditions aux limites

$$u'(a) - k_a u(a) = 0 \text{ et } u'(b) + k_b u(b) = 0; \quad 0 \leq k_a, k_b \leq \infty. \quad (2)$$

Appelons  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$  les valeurs propres (carrés des fréquences propres:  $\lambda_n = \omega_n^2$ ); nous chercherons à décrire leur comportement lorsque l'on modifie quelques-unes des fonctions  $p, q, \varrho$  ou les constantes  $k_a, k_b$ . — Les fonctions propres correspondantes seront désignées par  $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$ . On sait que  $u_1(x)$  ne change pas de signe dans l'intervalle  $(a, b)$ , prenons donc  $u_1(x) > 0$ .

<sup>1)</sup> Institut Battelle, Genève, et Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich.

## 1.2. Le principe de Rayleigh

La première valeur propre  $\lambda_1$  peut être caractérisée par le principe extrémal:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \text{Min}_v R[v], \text{ où} \\ R[v] &= \frac{\int_a^b (p v'^2 + q v^2) dx + p(a) k_a v^2(a) + p(b) k_b v^2(b)}{\int_a^b \varrho v^2 dx} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

est le quotient de RAYLEIGH; on admet à concurrence les fonctions  $v(x)$  continues et lisses par morceaux dans le segment  $[a, b]$ .

Une démonstration simple:

$$\begin{aligned} p v'^2 + q v^2 - \lambda_1 \varrho v^2 &= p v'^2 + q v^2 + \frac{(p u_1')' - q u_1}{u_1} v^2 = p v'^2 + \frac{(p u_1')'}{u_1} v^2 \\ &= \left( \frac{p u_1'}{u_1} v \right)' + p v'^2 + p \frac{u_1'^2}{u_1^2} v^2 - 2 p \frac{u_1'}{u_1} v v' = \left( \frac{p u_1'}{u_1} v^2 \right)' + p \left( v' - \frac{u_1'}{u_1} v \right)^2, \end{aligned}$$

d'où en intégrant:

$$\int_a^b (p v'^2 + q v^2 - \lambda_1 \varrho v^2) dx \geq \left[ \frac{p u_1'}{u_1} v^2 \right]_a^b = -p(b) k_b v^2(b) - p(a) k_a v^2(a);$$

$$\boxed{\begin{aligned} Q[p, q, -\lambda_1 \varrho; k_a, k_b; v] \\ \equiv \int_a^b (p v'^2 + q v^2 - \lambda_1 \varrho v^2) dx + p(a) k_a v^2(a) + p(b) k_b v^2(b) \geq 0. \end{aligned}} \quad (3')$$

On a l'égalité si  $v = u_1$ , d'où (3).

Valeurs propres supérieures:  $\lambda_n$  est caractérisée par le minimum de  $R[v]$  sous les  $n-1$  conditions d'orthogonalité

$$\int_a^b \varrho u_i v dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (\text{cf. [5]}^2), \text{ p. 346}.$$

1.3. Variation de la densité de masse  $\varrho(x)$ : convexité de  $\lambda_1^{-1}$ 

Maintenons fixes  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $k_a$  et  $k_b$ ; considérons notre problème (1) (2) avec une fonction  $\varrho_1(x)$ : valeurs propres  $\lambda_1^{(\varrho_1)} < \lambda_2^{(\varrho_1)} \leq \lambda_3^{(\varrho_1)} \leq \dots$ ; et avec une fonction  $\varrho_2(x)$ : valeurs propres  $\lambda_1^{(\varrho_2)} < \lambda_2^{(\varrho_2)} \leq \lambda_3^{(\varrho_2)} \leq \dots$ . Posons maintenant le problème avec  $\varrho_1 + \varrho_2$ ; soit  $\lambda_1^{(\varrho_1 + \varrho_2)}$  sa première valeur propre et  $u(x)$  la fonction

<sup>2)</sup> Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 321.

propre correspondante.  $u(x)$  est concurrente pour les problèmes  $(\varrho_1)$  et  $(\varrho_2)$ , donc :

$$Q[p, q, -\lambda_1^{(\varrho_1)} \varrho_1; k_a, k_b; u] \geq 0;$$

$$Q[p, q, -\lambda_1^{(\varrho_2)} \varrho_2; k_a, k_b; u] \geq 0;$$

$$Q[p, q, -\lambda_1^{(\varrho_1 + \varrho_2)} (\varrho_1 + \varrho_2); k_a, k_b; u] = 0.$$

Multiplions la première relation par  $\lambda_1^{(\varrho_2)} / [\lambda_1^{(\varrho_1)} + \lambda_1^{(\varrho_2)}]$ , la seconde par  $\lambda_1^{(\varrho_1)} / [\lambda_1^{(\varrho_1)} + \lambda_1^{(\varrho_2)}]$ , la troisième par  $(-1)$  et additionnons :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ \lambda_1^{(\varrho_1 + \varrho_2)} - \frac{\lambda_1^{(\varrho_1)} \lambda_1^{(\varrho_2)}}{\lambda_1^{(\varrho_1)} + \lambda_1^{(\varrho_2)}} \right\} \int_a^b (\varrho_1 + \varrho_2) u^2 dx \geq 0; \\ & -\frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_1 + \varrho_2)}} \leq \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_1)}} + \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_2)}}, \quad \text{soit en itérant:} \\ & \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_n)}} \leq \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_1)}} + \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_2)}} + \dots + \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_n)}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Soit  $T$  la durée d'une période:  $\lambda_1 = (2\pi/T_1)^2$ , d'où

$$T_1^{2(\varrho_1 + \varrho_2)} \leq T_1^{2(\varrho_1)} + T_1^{2(\varrho_2)}. \quad (4')$$

(4) peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{\lambda_1^{\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\right)}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_1)}} + \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_2)}} \right), \quad (4'')$$

ce qui signifie: Dans une famille linéaire  $\varrho(x) \equiv \varrho_0(x) + \kappa \sigma(x)$ ,  $1/\lambda_1^{(\varrho)} = 1/\lambda_1(\kappa)$  est une fonction convexe (vers le bas) du paramètre  $\kappa^2$ .

Remarque: Dans le cas particulier  $\sigma(x) = \text{const} \cdot \varrho_0(x)$ ,  $1/\lambda_1(\kappa)$  est une fonction linéaire de  $\kappa$ .

L'inégalité (4) n'est pas nouvelle: cf. WEYL [11], p. 445; SOUTHWELL [10], p. 483; COLLATZ [4], p. 314 («formule de DUNKERLEY»). — (4'') s'ajoute à des résultats de la théorie de STURM, cf. [3], notamment pp. 57/58.

### 1.3.1. Exemple:

$$u'' + \lambda \varrho(x) u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0; \quad \varrho_1 \equiv 1; \quad \varrho_2 = \frac{2}{\alpha} \cotg\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \delta_{1/2}$$

(masse de DIRAC).

On obtient  $\lambda_1^{(\varrho_1)} = \pi^2$  et  $\lambda_1^{(\varrho_2)} = 2\alpha \operatorname{tg}(\alpha/2)$ ; d'où par (4):

$$\frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_1 + \varrho_2)}} \leq \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\alpha \operatorname{tg}(\alpha/2)};$$

<sup>a)</sup> Voir Post-scriptum a), page 320.



en réalité,

$$\lambda_1^{(\varrho_1 + \varrho_2)} = \alpha^2 ;$$

voyons donc ce que vaut l'inégalité

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{2 \alpha \operatorname{tg} (\alpha/2)} \leqslant \frac{1}{\pi^2} .$$

Le membre de gauche vaut:  $1/12$  lorsque  $\alpha = 0$ ;  $(4 - \pi)/\pi^2$  pour  $\alpha = \pi/2$ ;  $1/\pi^2$  pour  $\alpha = \pi$ .

1.4. Extension aux valeurs propres supérieures

Soient  $u_1, u_2, \dots, u_{m+n+1}$  les premières fonctions propres pour  $(\varrho_1 + \varrho_2)$ ; dans l'espace linéaire  $L(u_1, \dots, u_{m+n+1})$  engendré par ces fonctions, il existe au moins une combinaison  $u$  satisfaisant à la fois aux  $m$  conditions d'orthogonalité pour  $\lambda_{m+1}^{(\varrho_1)}$  et aux  $n$  conditions d'orthogonalité pour  $\lambda_{n+1}^{(\varrho_2)}$ , soit en tout à  $(m + n)$  conditions. Nous avons donc à présent:

$$Q [p, q, -\lambda_{m+1}^{(\varrho_1)} \varrho_1; k_a, k_b; u] \geqslant 0 ;$$

$$Q [p, q, -\lambda_{n+1}^{(\varrho_2)} \varrho_2; k_a, k_b; u] \geqslant 0 ;$$

d'autre part, comme  $u \in L(u_1, \dots, u_{m+n+1})$ , son quotient de RAYLEIGH  $R[u] \leqslant \lambda_{m+n+1}^{(\varrho_1 + \varrho_2)}$ , d'où

$$Q [p, q, -\lambda_{m+n+1}^{(\varrho_1 + \varrho_2)} (\varrho_1 + \varrho_2); k_a, k_b; u] \leqslant 0 .$$

Multiplions la première inégalité par  $\lambda_{n+1}^{(\varrho_2)}/[\lambda_{m+1}^{(\varrho_1)} + \lambda_{n+1}^{(\varrho_2)}]$ , la seconde par  $\lambda_{m+1}^{(\varrho_1)}/[\lambda_{m+1}^{(\varrho_1)} + \lambda_{n+1}^{(\varrho_2)}]$ , la troisième par  $(-1)$  et additionnons:

$$\left\{ \lambda_{m+n+1}^{(\varrho_1 + \varrho_2)} - \frac{\lambda_{m+1}^{(\varrho_1)} \lambda_{n+1}^{(\varrho_2)}}{\lambda_{m+1}^{(\varrho_1)} + \lambda_{n+1}^{(\varrho_2)}} \right\} \int_a^b (\varrho_1 + \varrho_2) u^2 dx \geqslant 0 ;$$

$$\frac{1}{\lambda_{m+n+1}^{(\varrho_1 + \varrho_2)}} \leqslant \frac{1}{\lambda_{m+1}^{(\varrho_1)}} + \frac{1}{\lambda_{n+1}^{(\varrho_2)}} ,$$

$$m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

Cas particulier  $n = 0$ : je pose  $i = m + 1$ ;

$$\frac{1}{\lambda_i^{(\varrho_1 + \varrho_2)}} \leqslant \frac{1}{\lambda_i^{(\varrho_1)}} + \frac{1}{\lambda_1^{(\varrho_2)}} , \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5')$$

Si  $i = 1$ , on retrouve (4).

L'adjonction d'une répartition de masses  $\varrho_2$  augmente  $1/\lambda_i$  (pour tout  $i$ ) au plus de la quantité  $1/\lambda_1^{(\varrho_2)}$ .

En raisonnant sur des équations intégrales, WEYL ([11], p. 445) obtenait dès 1912 l'inégalité correspondant à (5), ce qui contient en fait notre résultat; il l'a utilisée pour l'étude du comportement asymptotique des valeurs propres.

1. 4. 1. *Exemple:*

$$u'' + \lambda \varrho u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

$$\varrho_1 = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{pour } x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} = 1 - \varrho_2.$$

$$\lambda_1^{(\varrho_1 + \varrho_2)} = \pi^2; \quad \lambda_2^{(\varrho_1 + \varrho_2)} = 4\pi^2; \quad \lambda_3^{(\varrho_1 + \varrho_2)} = 9\pi^2; \quad \lambda_m^{(\varrho_1)} = \lambda_m^{(\varrho_2)};$$

(4) et (5) donnent

$$\lambda_1^{(\varrho_1)} \leq 2\lambda_1^{(\varrho_1 + \varrho_2)} = 2\pi^2; \quad \lambda_2^{(\varrho_1)} \leq 2\lambda_3^{(\varrho_1 + \varrho_2)} = 18\pi^2;$$

tandis qu'en réalité

$$\lambda_1^{(\varrho_1)} \simeq 16,47; \quad \lambda_2^{(\varrho_1)} \simeq 96,56.$$

*Remarque:* Cet exemple montre qu'il n'est pas vrai que  $1/\lambda_2^{(\varrho_1 + \varrho_2)}$  soit inférieur ou égal à  $1/\lambda_2^{(\varrho_1)} + 1/\lambda_2^{(\varrho_2)}$ , car ici

$$\frac{1}{4\pi^2} \not\leq \frac{1}{96,56} + \frac{1}{96,56} = \frac{1}{48,28}.$$

Autre exemple contraire:  $\varrho_1 = \delta_{x_1}$ ,  $\varrho_2 = \delta_{x_2}$ ; alors  $\lambda_2^{(\varrho_1)} = \lambda_2^{(\varrho_2)} = +\infty$ .

1. 4. 2. *Généralisation immédiate:*

$$\frac{1}{\lambda_{m_1 + m_2 + \dots + m_N + 1}^{(\varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_N)}} \leq \frac{1}{\lambda_{m_1 + 1}^{(\varrho_1)}} + \frac{1}{\lambda_{m_2 + 1}^{(\varrho_2)}} + \dots + \frac{1}{\lambda_{m_N + 1}^{(\varrho_N)}}.$$

1. 4. 3. *Adjonction de masses ponctuelles.* — Si  $\varrho_2$  est formée de  $k$  masses ponctuelles quelconques, on a  $\lambda_{k+1}^{(\varrho_2)} = \lambda_{k+2}^{(\varrho_2)} = \dots = \infty$  (car  $\int \varrho_2 u_j^{(\varrho_2)} v dx = 0$ ,  $j = 1, \dots, k$ , entraîne  $R^{(\varrho_2)}[v] = \infty$ ). Posons, dans (5),  $n = k$  et  $m + 1 = i$ , nous obtenons

$$\lambda_i^{(\varrho_1)} \leq \lambda_{i+k}^{(\varrho_1 + \varrho_2)} \quad (\leq \lambda_{i+k}^{(\varrho_1)}), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

*L'adjonction de  $k$  masses ponctuelles ne peut pas abaisser  $\lambda_{i+k}$  au-dessous de l'ancien  $\lambda_i$ .*

Cette propriété se démontre directement ainsi: Soient  $u_1, u_2, u_3, \dots$  les fonctions propres pour  $(\varrho_1 + \varrho_2)$ ; dans l'espace linéaire  $L(u_1, \dots, u_{i+k})$ , il existe au moins une combinaison  $u$  satisfaisant aux  $i - 1$  conditions d'orthogonalité pour  $\lambda_i^{(\varrho_1)}$  et s'annulant aux  $k$  points portant les masses de  $\varrho_2$ , soit en tout  $i + k - 1$  conditions linéaires;

$$\lambda_i^{(\varrho_1)} \leq R^{(\varrho_1)}[u] = R^{(\varrho_1 + \varrho_2)}[u] \leq \lambda_{i+k}^{(\varrho_1 + \varrho_2)}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Notre énoncé est voisin du suivant bien connu: L'adjonction de  $k$  contraintes ponctuelles ne peut pas élever  $\lambda_i$  au-dessus de l'ancien  $\lambda_{i+k}$ .

*Remarque:* Pour un système vibrant *quelconque* dans l'espace à trois dimensions, on remplacera  $k$  par  $3k$  dans ces formules. En effet, on a alors  $\lambda_{3k+1}^{(e_3)} = \infty$ . — *Théorème analogue:* L'adjonction de  $k$  corps rigides (système à  $6k$  degrés de liberté) ne peut jamais abaisser  $\lambda_{i+6k}$  au-dessous de l'ancien  $\lambda_i$ .

### 1.5. Variation des fonctions $p(x)$ et $q(x)$

Maintenons fixes  $q(x)$ ,  $k_a$  et  $k_b$ ; considérons le problème initial (1) (2) avec  $p_1(x)$  et  $q_1(x)$ : valeurs propres  $\lambda_1^{(p_1, q_1)} < \lambda_2^{(p_1, q_1)} \leq \lambda_3^{(p_1, q_1)} \leq \dots$ ; et avec  $p_2(x)$  et  $q_2(x)$ : valeurs propres  $\lambda_1^{(p_2, q_2)} < \lambda_2^{(p_2, q_2)} \leq \lambda_3^{(p_2, q_2)} \leq \dots$ . Posons maintenant le problème avec  $p_1 + p_2$ ,  $q_1 + q_2$ ; soient  $\lambda_1^{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)} < \lambda_2^{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)} \leq \lambda_3^{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)} \leq \dots$  ses valeurs propres et  $u_1, u_2, u_3, \dots$  les fonctions propres correspondantes. — Dans l'espace linéaire  $L(u_1, \dots, u_{m+n+1})$ , il existe de nouveau une fonction  $u$  satisfaisant à la fois aux  $m$  conditions d'orthogonalité pour  $\lambda_{m+1}^{(p_1, q_1)}$  et aux  $n$  conditions d'orthogonalité pour  $\lambda_{n+1}^{(p_2, q_2)}$ ; donc

$$Q[p_1, q_1, -\lambda_{m+1}^{(p_1, q_1)} q; k_a, k_b; u] \geq 0;$$

$$Q[p_2, q_2, -\lambda_{n+1}^{(p_2, q_2)} q; k_a, k_b; u] \geq 0;$$

$$Q[p_1 + p_2, q_1 + q_2, -\lambda_{m+n+1}^{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)} q; k_a, k_b; u] \leq 0.$$

Additionnons les deux premières inégalités et retranchons la troisième:

$$\{\lambda_{m+n+1}^{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)} - (\lambda_{m+1}^{(p_1, q_1)} + \lambda_{n+1}^{(p_2, q_2)})\} \int_a^b q u^2 dx \geq 0;$$

$$\boxed{\lambda_{m+n+1}^{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)} \geq \lambda_{m+1}^{(p_1, q_1)} + \lambda_{n+1}^{(p_2, q_2)}} \quad , \quad m, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Le cas particulier  $m = n = 0$ :

$$\lambda_1^{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)} \geq \lambda_1^{(p_1, q_1)} + \lambda_1^{(p_2, q_2)} \quad (6')$$

se trouve également dans le livre de SOUTHWELL [10], p. 478–480; cette inégalité peut aussi s'écrire

$$\lambda_1^{(\frac{p_1 + p_2}{2}, \frac{q_1 + q_2}{2})} \geq \frac{1}{2} (\lambda_1^{(p_1, q_1)} + \lambda_1^{(p_2, q_2)}): \quad (6'')$$

Dans une famille linéaire  $p(x) = p_0(x) + \kappa \cdot \zeta(x)$ ,  $q(x) = q_0(x) + \kappa \cdot \eta(x)$ , la première valeur propre  $\lambda_1^{(p, q)} = \lambda_1(\kappa)$  est une fonction convexe vers le haut du paramètre  $\kappa$ <sup>3)</sup>.



*Remarque:* Si  $\zeta(x)/p_0(x) = \text{const} = \eta(x)/q_0(x)$ ,  $\lambda_1(x)$  est une fonction linéaire de  $x$ .

Cas  $n = 0$ : posons  $i = m + 1 = 1, 2, 3, \dots$

$$\lambda_i^{(p_1 + p_2, q_1 + q_2)} \geq \lambda_i^{(p_1, q_1)} + \lambda_1^{(p_2, q_2)}. \quad (6''')$$

### 1.6. Variation des liaisons élastiques $k_a$ et $k_b$ aux extrémités

Maintenons fixes  $p(x)$ ,  $q(x)$ ,  $\varrho(x)$ ; alors  $\lambda_m = \lambda_m(k_a, k_b)$ ; un raisonnement du même type fournit les inégalités

$$\lambda_{m+n+1} \left( \frac{k_a^{(1)} + k_a^{(2)}}{2}, \frac{k_b^{(1)} + k_b^{(2)}}{2} \right) \geq \frac{1}{2} \{ \lambda_{m+1}(k_a^{(1)}, k_b^{(1)}) + \lambda_{n+1}(k_a^{(2)}, k_b^{(2)}) \}; \quad (7)$$

$$m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Le cas particulier  $m = n = 0$  exprime la propriété: *Dans une famille linéaire  $k_a = k_{a0} + x c_a$ ,  $k_b = k_{b0} + x c_b$ , la première valeur propre  $\lambda_1(k_a, k_b)$  est une fonction convexe vers le haut du paramètre  $x$ .*

### 1.7. Application à la symétrisation des fonctions données

1.7.1. *Symétrisation des masses:* Supposons  $a = -b$  (l'origine  $O$  est au milieu de l'intervalle) et  $p(-x) = p(x)$ ,  $q(-x) = q(x)$ ,  $k_a = k_b$ . — Une répartition de masses  $\varrho(x)$  étant donnée, définissons la répartition symétrisée

$$\tilde{\varrho}(x) = \frac{1}{2} [\varrho(x) + \varrho(-x)]. \quad (8)$$

Appliquons (4'') et (5) aux répartitions  $\varrho(x)$  et  $\varrho(-x)$ , nous obtenons

$$\lambda_1^{(\tilde{\varrho})} \geq \lambda_1^{(\varrho)}; \quad \text{plus généralement: } \lambda_{2m+1}^{(\tilde{\varrho})} \geq \lambda_{m+1}^{(\varrho)}. \quad (9)$$

*Remarques:* a) Cette inégalité peut être démontrée directement ainsi:  $u_1^{(\tilde{\varrho})}$  étant une fonction paire,  $\lambda_1^{(\tilde{\varrho})} = R^{(\tilde{\varrho})}[u_1^{(\tilde{\varrho})}] = R^{(\varrho)}[u_1^{(\tilde{\varrho})}] \geq \lambda_1^{(\varrho)}$ .

b) La symétrisation des masses définie par (8) est différente de la «symétrisation alternée» suivante (PÓLYA; HERSCH [6]):

Définissons les deux répartitions symétriques  $\varrho_d(x) = \varrho(|x|)$  et  $\varrho_g(x) = \varrho(-|x|)$ ; on a

$$0 = 2 Q[p, q, -\lambda_1^{(\varrho)} \varrho; k_a, k_a; u_1^{(\varrho)}]$$

$$= Q[p, q, -\lambda_1^{(\varrho)} \varrho_d; k_a, k_a; u_1^{(\varrho)}] + Q[p, q, -\lambda_1^{(\varrho)} \varrho_g; k_a, k_a; u_1^{(\varrho)}];$$

l'un des deux termes à droite est donc  $\leq 0$ , d'où

$$\lambda_1^{(\varrho)} \geq \min(\lambda_1^{(\varrho_d)}, \lambda_1^{(\varrho_g)}); \quad (10)$$

cette évaluation de  $\lambda_1^{(v)}$  est en sens contraire de (9): notre symétrisation des masses par moyenne arithmétique (8) élève  $\lambda_1$ , tandis que la symétrisation alternée l'abaisse.

Note: On démontre de façon analogue l'inégalité plus générale

$$\lambda_{m+n+1}^{(v)} \geq \min(\lambda_{m+1}^{(ed)}, \lambda_{n+1}^{(eg)}). \quad (10')$$

(10) et (10') restent valables, si  $p(x)$  et  $q(x)$  ne sont pas paires, avec

$$p_d(x) = p(|x|), \quad p_g(x) = p(-|x|), \quad q_d(x) = q(|x|), \quad q_g(x) = q(-|x|);$$

et, si  $k_a \neq k_b$ , avec  $k_{ad} = k_{bd} = k_b$ ,  $k_{ag} = k_{bg} = k_a$ .

– Encore plus généralement, la symétrisation alternée compare entre elles les valeurs propres pour des intervalles de longueurs différentes.

c) Ces deux symétrisations sont essentiellement différentes de celles de B. SCHWARZ [9] et BEESACK [1].

d) Reprenons l'exemple 1. 4. 1:

$$\varrho = \varrho_1; \quad \lambda_1^{(v)} \simeq 16,47; \quad \lambda_2^{(v)} \simeq 96,56;$$

$$\tilde{\varrho} \equiv \frac{1}{2}; \quad \lambda_1^{(\tilde{v})} = 2\pi^2; \quad \lambda_2^{(\tilde{v})} = 8\pi^2; \quad \lambda_3^{(\tilde{v})} = 18\pi^2.$$

On vérifie que  $\lambda_1^{(\tilde{v})} \geq \lambda_1^{(v)}$  et  $\lambda_3^{(\tilde{v})} \geq \lambda_2^{(v)}$ ; mais attention:  $\lambda_2^{(\tilde{v})} \not\geq \lambda_2^{(v)}$ !

1.7.2. Des considérations analogues sont possibles pour:

- $\alpha$ ) une symétrisation des fonctions  $p(x)$  et  $q(x)$  lorsque  $\varrho(x)$  est paire et  $k_a = k_b$ ;
- $\beta$ ) une symétrisation des liaisons aux extrémités:  $\tilde{k}_a = \tilde{k}_b = (k_a + k_b)/2$  lorsque  $p(x)$ ,  $q(x)$  et  $\varrho(x)$  sont des fonctions paires.

Ces deux symétrisations ont pour effet d'augmenter la première valeur propre.

## 1.8. Application: Evaluation par défaut de $\lambda_1$ à l'aide de la fonction de Green

1.8.1. La fonction de GREEN  $g(x, \xi)$  ( $a \leq x, \xi \leq b$ ) satisfait aux conditions aux limites

$$g_x(a, \xi) - k_a g(a, \xi) = 0, \quad g_x(b, \xi) + k_b g(b, \xi) = 0$$

et à l'équation différentielle

$$(p g_x)_x - q g = -\delta_\xi,$$

où  $\delta_\xi$  est une mesure de DIRAC au point  $\xi$ .

$g(x, \xi)$  est donc, pour  $\xi$  fixe, solution de l'équation différentielle  $L_x[g(x, \xi)] = 0$  (cf. (1)) avec  $\varrho(x) = \delta_\xi$  et  $\lambda_1 = 1/g(\xi, \xi)$ ; elle satisfait aussi (2).

Pour chaque  $\xi$  entre  $a$  et  $b$ , nous avons l'inégalité

$$0 \leq Q \left[ p, q, -\frac{1}{g(\xi, \xi)} \delta_\xi; k_a, k_b; v(x) \right] \\ = \int_a^b (p v'^2 + q v^2) dx - \frac{v^2(\xi)}{g(\xi, \xi)} + p(a) k_a v^2(a) + p(b) k_b v^2(b)$$

avec l'égalité pour  $v(x) = c g(x, \xi)$ . On peut ainsi évaluer  $g(\xi, \xi)$  par défaut (cf. [2], p. 277).

Considérons maintenant une répartition de masses  $\varrho(x) \geq 0$ , sa première valeur propre  $\lambda_1^{(q)}$  et sa première fonction propre  $u(x)$ ; posons  $v = u(x)$  dans l'inégalité ci-dessus, multiplions-la par  $\varrho(\xi) g(\xi, \xi)$  et intégrons par rapport à  $\xi$ :

$$0 \leq \left\{ \int_a^b (p u'^2 + q u^2) dx + p(a) k_a u^2(a) + p(b) k_b u^2(b) \right\} \int_a^b \varrho(\xi) g(\xi, \xi) d\xi \\ - \int_a^b \varrho(\xi) u^2(\xi) d\xi \\ = \int_a^b \varrho(\xi) g(\xi, \xi) d\xi \cdot Q \left[ p, q, -\frac{q}{\int_a^b \varrho(\xi) g(\xi, \xi) d\xi}; k_a, k_b; u \right].$$

Admettons que  $g(\xi, \xi)$  soit finie ( $> 0$ ); nous soustrayons de

$$Q \left[ p, q, -\frac{q}{\int_a^b \varrho(\xi) g(\xi, \xi) d\xi}; k_a, k_b; u \right] \geq 0$$

l'égalité

$$Q [p, q, -\lambda_1^{(q)} q; k_a, k_b; u] = 0;$$

nous obtenons

$$\left\{ \lambda_1^{(q)} - \frac{1}{\int_a^b \varrho(\xi) g(\xi, \xi) d\xi} \right\} \int_a^b \varrho(\xi) u^2(\xi) d\xi \geq 0, \\ \frac{1}{\lambda_1^{(q)}} \leq \int_a^b \varrho(\xi) g(\xi, \xi) d\xi. ^4) \quad (11)$$

On a l'égalité si la masse  $\varrho$  est concentrée en un point  $\xi$ , quel qu'il soit:  $\varrho = c \cdot \delta_\xi$ ; alors  $\lambda_1^{(q)} = 1/cg(\xi, \xi)$ ; la fonction propre fondamentale est alors simplement  $u_1(x) = g(x, \xi)$ .

L'inégalité (11) n'est autre que la limite continue de (4).

<sup>4)</sup> Voir Post-scriptum b), page 321.



1.8.2. *Corde vibrante inhomogène à extrémités fixées:*

$u'' + \lambda \varrho(x) u = 0$  avec  $u(a) = u(b) = 0$ .

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(x-a)(b-\xi)}{(b-a)} & \text{pour } x \leq \xi \\ \frac{(b-x)(\xi-a)}{(b-a)} & \text{pour } x \geq \xi \end{cases}; \quad g(\xi, \xi) = \frac{(b-\xi)(\xi-a)}{b-a},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda_1^{(a)}} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (b-\xi)(\xi-a) \varrho(\xi) d\xi. \tag{12}$$

(J'apprends que cette inégalité est déjà connue de plusieurs mathématiciens, notamment SCHIFFER, SZEGÖ et LAX.)

1.8.3. *Barre vibrante inhomogène, encastree aux extrémités:*

$u^{IV} - \lambda \varrho(x) u = 0$  avec  $u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0$ .

(11) reste valable avec

$$g(\xi, \xi) = \frac{(b-\xi)^3(\xi-a)^3}{3(b-a)^3},$$

d'où

$$\frac{1}{\lambda_1^{(a)}} \leq \frac{1}{3(b-a)^3} \int_a^b (b-\xi)^3(\xi-a)^3 \varrho(\xi) d\xi. \tag{13}$$

§ 2. **Membrane vibrante inhomogène**

2.1. Nous considérons le problème aux valeurs propres d'une membrane couvrant un domaine  $G$  du plan, et élastiquement liée le long de sa frontière  $\Gamma$ .

$$\Delta u + \lambda \varrho(x, y) u = 0 \text{ dans } G, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + k(s) u = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

où  $n$  désigne la normale extérieure.

Au lieu de (3'), nous définissons  $Q$  par

$$Q[-\lambda \varrho(x, y); k(s); v] \equiv \iint_G [\text{grad}^2 v - \lambda \varrho(x, y) v^2] dA + \oint_{\Gamma} k(s) v^2 ds,$$

où  $dA$  est l'élément d'aire et  $ds$  l'élément de longueur sur  $\Gamma$ . Le principe de RAYLEIGH dit que  $Q[-\lambda_1 \varrho; k(s); v] \geq 0$ , avec l'égalité si  $v = u_1(x, y)$ .

Les inégalités (4) et (5) restent valables, la démonstration se laissant transposer sans difficulté; de même,

$$\lambda_{m+n+1}^{(a; \frac{k_1(s)+k_2(s)}{2})} \geq \frac{1}{2} [\lambda_{m+1}^{(a; k_1(s))} + \lambda_{n+1}^{(a; k_2(s))}]. \tag{7'}$$

Si le domaine  $G$  est symétrique relativement à une droite, nous pouvons également transposer le § 1.7; une «symétrisation des masses» analogue va être indiquée ci-dessous. — En revanche, les résultats du § 1.8 deviennent triviaux, car la fonction de GREEN  $g(\xi, \xi) = \infty$  ici.

*Exemple simple:* Membrane carrée avec  $k(s) = \text{const}$ ; les chiffres indiquent la masse spécifique (ici constante par morceaux):

$$\lambda_1 \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline 0 & 2 \\ \hline \end{array} < \lambda_1 \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline \end{array} < \lambda_1 \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array};$$

l'inégalité de gauche s'obtient par symétrisation alternée (§ 1.7.1, b), celle de droite à l'aide de (4'') comme au § 1.7.1.

## 2.2. Membrane circulaire inhomogène: symétrisation des masses, inégalité de NEHARI.

2.2.1. Utilisons les coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ; soient  $G$  le cercle  $r < R$  et  $\Gamma$  sa circonférence; on donne  $\varrho(r, \theta)$  et  $k(\theta)$ ;  $\lambda_1$  sera la première valeur propre,  $u_1$  la fonction propre fondamentale.

Considérons la répartition «symétrisée»

$$\tilde{\varrho}(r) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\theta=0}^{2\pi} \varrho(r, \theta) d\theta,$$

et la liaison élastique (moyenne)

$$\tilde{k} \equiv \frac{1}{2\pi} \oint k(\theta) d\theta;$$

on a maintenant  $\tilde{\lambda}_1$  et  $\tilde{u}_1$ . — Comme  $\tilde{u}_1(r, \theta) = \tilde{u}_1(r)$  est indépendante de  $\theta$ , nous avons en vertu du principe de RAYLEIGH

$$Q[-\tilde{\lambda}_1 \varrho; k(s); \tilde{u}_1] = Q[-\tilde{\lambda}_1 \tilde{\varrho}; \tilde{k}; \tilde{u}_1] = 0 \leq Q[-\lambda_1 \varrho; k(s); \tilde{u}_1],$$

d'où

$$\tilde{\lambda}_1 \geq \lambda_1. \quad (14)$$

(Cette notation est équivalente à:

$$\tilde{\lambda}_1 = R^{(\tilde{\varrho}; \tilde{k})}[\tilde{u}_1] = R^{(\varrho; k)}[\tilde{u}_1] \geq \lambda_1.)$$

2.2.2. *Cas particulier:*  $k \equiv \infty$  (membrane à contour fixé) et  $\tilde{\varrho}(r)$  est monotone décroissante (dans  $0 \leq r < R$ ).

La fonction de BESSEL  $J_0(j_0 r/R)$  ( $j_0 = 2,4048$ ) est concurrente pour le principe de RAYLEIGH avec  $\tilde{\varrho}$ ; on sait que cette fonction est également décrois-

sante pour  $r < R$ ; d'où

$$\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1 \leq R^{(2)} \left[ J_0 \left( \frac{j_0}{R} r \right) \right] \leq \frac{j_0^2}{R^2} \frac{1}{\bar{\varrho}} = \frac{j_0^2}{R^2} \frac{1}{\bar{\varrho}},$$

où  $\bar{\varrho} = \frac{1}{\pi R^2} \iint_G \varrho \, dA$  (valeur moyenne). Nous avons donc :

Si  $\tilde{\varrho}(r)$  est monotone décroissante, la première valeur propre est au plus égale à celle d'une membrane circulaire homogène de même masse totale.

2.2.3. Tel est par exemple le cas si  $\varrho(r, \theta)$  est une fonction surharmonique ; nous retrouvons ici l'un des résultats de NEHARI [7].

### § 3. Equation de Schrödinger

3.1. Dans un domaine  $G$  de l'espace, de frontière  $\Gamma$ , considérons l'équation de SCHRÖDINGER

$$\Delta u + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x, y, z)] u = 0 \tag{15'}$$

avec les conditions aux limites

$$\frac{\partial u}{\partial n} + k(P) u = 0 \quad (P \in \Gamma) ;$$

$V(x, y, z)$  est le potentiel,  $E$  le niveau d'énergie. - Posons  $\lambda = (2m/\hbar^2) E$  et  $W(x, y, z) = (2m/\hbar^2) V(x, y, z)$ , nous avons

$$\Delta u + [\lambda - W(x, y, z)] u = 0 . \tag{15}$$

La première valeur propre  $\lambda_1$  est alors caractérisée par le principe de RAYLEIGH

$$\lambda_1 = \text{Min}_v R[v] = \text{Min}_v \frac{\iiint_G [\text{grad}^2 v + W(x, y, z) v^2] \, d\tau + \iint_{\Gamma} k v^2 \, dS}{\iiint_G v^2 \, d\tau},$$

où  $d\tau$  est l'élément de volume,  $dS$  l'élément de surface. - Nous pouvons donc ici définir

$$\begin{aligned} Q [W(x, y, z) - \lambda_1 ; k(P) ; v] \\ \equiv \iiint_G \{ \text{grad}^2 v + [W(x, y, z) - \lambda_1] v^2 \} \, d\tau + \iint_{\Gamma} k v^2 \, dS \geq 0 ; \end{aligned}$$

$Q = 0$  si  $v = u_1$  (première fonction propre).

Remarque: Si  $v$  est complexe, il faut écrire  $|\text{grad } v|^2$  au lieu de  $\text{grad}^2 v$  et  $|v|^2$  au lieu de  $v^2$ .

### 3.2. Variation du potentiel

Maintenons fixe  $k(P)$  sur la frontière  $\Gamma$ ; varions  $W(x, y, z)$ .

Premier cas:

$$W_1(x, y, z); \quad \lambda_1^{(W_1)}, \quad u_1^{(W_1)}; \quad \lambda_2^{(W_1)}, \quad u_2^{(W_1)}; \quad \lambda_3^{(W_1)}, \quad u_3^{(W_1)}; \quad \dots$$

second cas:

$$W_2(x, y, z); \quad \lambda_1^{(W_2)}, \quad u_1^{(W_2)}; \quad \lambda_2^{(W_2)}, \quad u_2^{(W_2)}; \quad \lambda_3^{(W_2)}, \quad u_3^{(W_2)}; \quad \dots$$

troisième cas:

$$\tilde{W}(x, y, z) = \frac{1}{2} (W_1 + W_2); \quad \tilde{\lambda}_1, \quad \tilde{u}_1; \quad \tilde{\lambda}_2, \quad \tilde{u}_2; \quad \tilde{\lambda}_3, \quad \tilde{u}_3; \quad \dots$$

#### 3.2.1. Niveau fondamental d'énergie

$$Q [W_1 - \lambda_1^{(W_1)}; \quad k; \quad \tilde{u}_1] \geq 0;$$

$$Q [W_2 - \lambda_1^{(W_2)}; \quad k; \quad \tilde{u}_1] \geq 0;$$

$$Q [\tilde{W} - \tilde{\lambda}_1; \quad k; \quad \tilde{u}_1] = 0.$$

Soustrayons la troisième relation de la moyenne arithmétique des deux premières, nous obtenons  $\tilde{\lambda}_1 - (1/2) (\lambda_1^{(W_1)} + \lambda_1^{(W_2)}) \geq 0$ , c'est-à-dire

$$\lambda_1^{\left(\frac{W_1 + W_2}{2}\right)} \geq \frac{1}{2} (\lambda_1^{(W_1)} + \lambda_1^{(W_2)}), \quad (16)$$

$$E_1^{\left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right)} \geq \frac{1}{2} (E_1^{(V_1)} + E_1^{(V_2)}). \quad (16')$$

Nous avons de nouveau une propriété de convexité: Si le potentiel  $V(x, y, z)$  est de la forme  $V(x, y, z) = V_0(x, y, z) + \kappa V(x, y, z)$ , alors le niveau fondamental d'énergie  $E_1 = E_1(\kappa)$  est une fonction convexe vers le haut du paramètre  $\kappa$ .

On montre de même, plus généralement:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } c_1, c_2, \dots, c_N \geq 0 \text{ et } c_1 + c_2 + \dots + c_N = 1, \\ \text{alors } E_1^{(c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_N V_N)} \geq c_1 E_1^{(V_1)} + c_2 E_1^{(V_2)} + \dots + c_N E_1^{(V_N)}. \end{array} \right\} \quad (17)$$

#### 3.2.2. Niveaux supérieurs d'énergie. Posons

$$\tilde{W}(x, y, z) = c W_1(x, y, z) + (1 - c) W_2(x, y, z), \quad 0 \leq c \leq 1;$$

soient  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_{m+n+1}$  les premières fonctions propres avec  $\tilde{W}$ ; dans l'espace linéaire  $L(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{m+n+1})$  engendré par ces fonctions, il existe au moins une



combinaison  $\tilde{u}$  satisfaisant à la fois aux  $m$  conditions d'orthogonalité pour  $\lambda_{m+1}^{(W_1)}$  et aux  $n$  conditions d'orthogonalité pour  $\lambda_{n+1}^{(W_2)}$ , soit en tout à  $(m+n)$  conditions. Nous avons donc:

$$Q[W_1 - \lambda_{m+1}^{(W_1)}; k; \tilde{u}] \geq 0;$$

$$Q[W_2 - \lambda_{n+1}^{(W_2)}; k; \tilde{u}] \geq 0;$$

d'autre part, comme  $\tilde{u} \in L(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{m+n+1})$ , son quotient de RAYLEIGH  $R^{(\tilde{W})}[\tilde{u}] \leq \tilde{\lambda}_{m+n+1}$ , d'où

$$Q[\tilde{W} - \tilde{\lambda}_{m+n+1}; k; \tilde{u}] \leq 0.$$

Multiplions la première inégalité par  $c$ , la seconde par  $(1-c)$ , la troisième par  $(-1)$  et additionnons:

$$\{\tilde{\lambda}_{m+n+1} - c \lambda_{m+1}^{(W_1)} - (1-c) \lambda_{n+1}^{(W_2)}\} \iiint \tilde{u}^2 d\tau \geq 0,$$

$$\lambda_{m+n+1}^{[c W_1 + (1-c) W_2]} \geq c \lambda_{m+1}^{(W_1)} + (1-c) \lambda_{n+1}^{(W_2)}; \quad (18)$$

$$E_{m+n+1}^{[c V_1 + (1-c) V_2]} \geq c E_{m+1}^{(V_1)} + (1-c) E_{n+1}^{(V_2)}. \quad (18')$$

Plus généralement:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } c_1, c_2, \dots, c_N \geq 0 \text{ et } c_1 + c_2 + \dots + c_N = 1, \\ \text{alors } E_{m_1 + \dots + m_{N+1}}^{(c_1 V_1 + \dots + c_N V_N)} \geq c_1 E_{m_1+1}^{(V_1)} + \dots + c_N E_{m_N+1}^{(V_N)}. \end{array} \right\} \quad (17')$$

3.2.3. *Application: cas d'une sphère.* a) Soit  $G$  une sphère de rayon  $R$ ; symétrisons à la fois le potentiel  $V(r, \theta, \varphi)$  et le coefficient  $k(P)$  sur la frontière  $\Gamma$ :

$$\tilde{V}(r, \theta, \varphi) = \tilde{V}(r) = \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \oint_{\varphi=0}^{2\pi} V(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi;$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} k(P) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Alors

$$\tilde{E}_1 \geq E_1.$$

En effet, soit  $\tilde{u}_1$  la première fonction propre avec  $\tilde{W}(r)$  et  $\tilde{k}$ ;  $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(r)$ , donc

$$0 \leq Q[W(r, \theta, \varphi) - \lambda_1; k(\theta, \varphi); \tilde{u}_1] = Q[\tilde{W}(r) - \lambda_1; \tilde{k}; \tilde{u}_1];$$

soustrayons l'égalité  $0 = Q[\tilde{W}(r) - \tilde{\lambda}_1; \tilde{k}; \tilde{u}_1]$ : nous obtenons

$$0 \leq (\tilde{\lambda}_1 - \lambda_1) \iiint \tilde{u}_1^2 d\tau,$$

ce qui démontre notre inégalité.

b) Supposons par exemple  $k \equiv \infty$  ou bien  $W(r \geq R, \theta, \varphi) \equiv \infty$ , c'est-à-dire  $u \equiv 0$  pour  $r \geq R$ . Si en outre  $W(r, \theta, \varphi)$  est, dans la sphère, une fonction harmonique,

$$\tilde{W}(r) \equiv W(0), \quad \text{donc} \quad \tilde{W} = \text{const} = \left( \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R^3} \right) \iiint_G W(r, \theta, \varphi) d\tau;$$

d'où

$$\lambda_1^{(\tilde{W})} = \tilde{W} + \lambda_1^{(0)} = \tilde{W} + \frac{\pi^2}{R^2}, \quad \text{car} \quad \hat{u}_1 = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi}{R} r\right);$$

$$\lambda_1^{(W)} \leq \frac{\pi^2}{R^2} + \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R^3} \iiint_G W(r, \theta, \varphi) d\tau \quad (k \equiv \infty \text{ sur } \Gamma). \quad (19)$$

(N.B.: Si la condition sur  $\Gamma$  était  $\partial u / \partial n = 0$  au lieu de  $u = 0$ , le terme  $\pi^2/R^2$  serait à remplacer par zéro; l'inégalité est alors une conséquence immédiate du principe de RAYLEIGH, même si le potentiel n'est pas harmonique: il suffit de prendre une fonction d'essai constante.)

Plus généralement, si  $W(r, \theta, \varphi)$  est sous-harmonique, l'inégalité (19) reste valable. — En effet,  $\tilde{W}(r)$  est alors monotone croissante;  $u_1^{(0)}(r) = r^{-1} \sin(\pi r/R)$  est monotone décroissante et nulle sur  $\Gamma$ , donc

$$\lambda_1^{(W)} \leq \lambda_1^{(\tilde{W})} \leq \frac{\iiint [\text{grad}^2 u_1^{(0)} + \tilde{W} u_1^{(0)^2}] d\tau}{\iiint u_1^{(0)^2} d\tau}$$

$$\leq \frac{\pi^2}{R^2} + \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R^3} \iiint_G \tilde{W} d\tau = \frac{\pi^2}{R^2} + \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R^3} \iiint_G W d\tau.$$

#### § 4. Plaque vibrante encastree inhomogene

4.1. Dans un domaine  $G$  du plan, de contour  $\Gamma$ , nous considérons l'équation différentielle

$$\Delta \Delta u - \lambda \varrho(x, y) u = 0$$

et les conditions aux limites

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Les inégalités (4) et (5) restent valables, ainsi que, si  $G$  a un axe de symétrie, (9) avec (8).

#### 4.2. Evaluation à l'aide de la fonction de Green

La fonction de GREEN  $g(P, S)$  doit,  $S$  étant fixe, satisfaire à l'équation différentielle  $\Delta_P \Delta_P g(P, S) = \delta_S$  (mesure de DIRAC) et aux conditions aux limites  $g = \partial g / \partial n_P = 0$  pour  $P \in \Gamma$ .

$g(P, S) = (1/8 \pi) r_{PS}^2 \ln r_{PS} +$  (fonction de  $P$ , régulière au point  $S$ ). Cf. [8], p. 140: Notre  $g(P, S) = \Gamma(P, S)/8 \pi$ ;  $g(S, S) = s_S^2/16 \pi$ ; PÓLYA et SZEGÖ appellent  $s_S$  le «rayon intérieur biharmonique» au point  $S$ .

$g(P, S)$  est la fonction propre (fondamentale) avec la masse spécifique  $\delta_S$  (masse unité au point  $S$ ); la valeur propre correspondante est  $1/g(S, S)$ , car

$$\Delta_P \Delta_P g(P, S) - \frac{1}{g(S, S)} \delta_S g(P, S) = 0 .$$

Donc, en vertu du principe de RAYLEIGH,

$$\frac{1}{g(S, S)} \leq \frac{\iint (\Delta v)^2 dA}{\iint \delta_S v^2(P) dA_P} = \frac{\iint (\Delta v)^2 dA}{v^2(S)} ,$$

soit

$$v^2(S) \leq g(S, S) \iint_G (\Delta v)^2 dA \tag{20}$$

pour toute fonction  $v$  admissible, satisfaisant aux conditions aux limites; on a l'égalité si et seulement si  $v(P) = c g(P, S)$  (cf. [2], p. 277).

En particulier, introduisons pour  $v$  la première fonction propre  $u(x, y)$  pour la masse spécifique  $\varrho(x, y)$ ;

$$\iint (\Delta u)^2 dA = \lambda_1^{(\varrho)} \iint \varrho u^2 dA ,$$

d'où

$$u^2(S) \leq g(S, S) \iint (\Delta u)^2 dA = \lambda_1^{(\varrho)} g(S, S) \iint \varrho u^2 dA . \tag{20'}$$

Multiplions par  $\varrho(S)$  et intégrons dans  $G$ , nous obtenons

$$\frac{1}{\lambda_1^{(\varrho)}} \leq \iint_G \varrho(S) g(S, S) dA_S = \frac{1}{16 \pi} \iint_G \varrho(S) s_S^2 dA_S ; \tag{11'}$$

on a l'égalité chaque fois que la masse  $\varrho$  est concentrée en un point.

4.3. *Plaquette circulaire* (de rayon  $R$ )

4.3.1. Définissons de nouveau la répartition de masses symétrisée

$$\tilde{\varrho}(r) = \frac{1}{2 \pi} \int_{\theta=0}^{2 \pi} \varrho(r, \theta) d\theta ;$$

comme au § 2.2.1, nous avons

$$\tilde{\lambda}_1 \geq \lambda_1 .$$

4.3.2. Cf. [8], p. 141:  $s_S = (R^2 - |OS|^2)/R$ ; donc par (11'):

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}_1} \leq \frac{1}{\lambda_1} \leq \frac{1}{16\pi R^2} \int_{r=0}^R (R^2 - r^2)^2 r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \varrho(r, \theta) d\theta; \quad (21)$$

la détermination de  $\tilde{\lambda}_1$  pose un problème aux valeurs propres à une dimension; à l'aide du principe de RAYLEIGH, on peut obtenir des bornes explicites à gauche de (21).

## § 5. Problèmes du type de Poisson

### 5.1. Equilibre d'une membrane chargée

Les méthodes qui vont suivre s'appliquent à des espaces à un nombre quelconque de dimensions et à des opérateurs différentiels plus généraux que ceux que nous considérons ici. — Nous nous occupons d'abord du problème de POISSON

$\Delta u = -\varrho(x, y)$  dans un domaine  $G$  du plan,  $u = 0$  sur sa frontière  $\Gamma$ .

On s'intéresse à l'intégrale de DIRICHLET

$$D(u) \equiv \iint_G \text{grad}^2 u \, dA = \iint_G \varrho u \, dA.$$

Le principe de Dirichlet dit que

$$D(u) = \text{Max}_{v=0 \text{ sur } \Gamma} \frac{\left( \iint_G \varrho v \, dA \right)^2}{D(v)}.$$

### 5.2. Variation des pressions: convexité

Premier cas:  $\varrho_1$ ; solution  $u_1 = u_{e_1}$ .

Second cas:  $\varrho_2$ ; solution  $u_2 = u_{e_2}$ .

Troisième cas:  $\tilde{\varrho} = (\varrho_1 + \varrho_2)/2$ ; solution  $\tilde{u} = u_{\tilde{\varrho}}$ .

$\tilde{u}$  est concurrente pour les principes de DIRICHLET relatifs à  $\varrho_1$  et à  $\varrho_2$ , d'où

$$\sqrt{D(u_1)} \geq \frac{\iint \varrho_1 \tilde{u} \, dA}{\sqrt{D(\tilde{u})}}; \quad \sqrt{D(u_2)} \geq \frac{\iint \varrho_2 \tilde{u} \, dA}{\sqrt{D(\tilde{u})}};$$

$$\frac{1}{2} [\sqrt{D(u_1)} + \sqrt{D(u_2)}] \geq \frac{\iint \tilde{\varrho} \tilde{u} \, dA}{\sqrt{D(\tilde{u})}} = \sqrt{D(\tilde{u})};$$

$$\boxed{\sqrt{D(u_{(\varrho_1 + \varrho_2)/2})} \leq \frac{1}{2} [\sqrt{D(u_{e_1})} + \sqrt{D(u_{e_2})}]} \quad (22)$$



Si l'on considère une famille linéaire de répartitions des pressions

$$\varrho(x, y) = \varrho_0(x, y) + \kappa \sigma(x, y),$$

alors

$$\sqrt{D(u_\varrho)} = \sqrt{\iint \varrho u_\varrho dA}$$

est une fonction convexe (vers le bas) du paramètre  $\kappa$ .

Remarque: Dans le cas particulier  $\sigma(x, y) = \text{const} \cdot \varrho_0(x, y)$ ,  $\sqrt{D(u_\varrho)}$  est une fonction linéaire de  $\kappa$ .

### 5.3. Equilibre d'une membrane circulaire chargée: symétrisation des pressions

Nous imposons de nouveau  $u = 0$  sur la circonférence  $\Gamma$ . Symétrisons les pressions:

$$\tilde{\varrho}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \varrho(r, \theta) d\theta;$$

soient  $u(r, \theta)$  la solution avec  $\varrho$ , et  $\tilde{u}(r)$  la solution avec  $\tilde{\varrho}$ ;

$$\sqrt{D(u)} \geq \frac{\iint \varrho \tilde{u} dA}{\sqrt{D(\tilde{u})}} = \frac{\iint \tilde{\varrho} \tilde{u} dA}{\sqrt{D(\tilde{u})}} = \sqrt{D(\tilde{u})},$$

$$D(\tilde{u}) \leq D(u). \quad (23)$$

### 5.4. Equilibre d'une plaque encastree chargée

$\Delta u = \varrho(x, y)$  dans  $G$ ,  $u = \partial u / \partial n = 0$  sur le contour  $\Gamma$ . Principe de DIRICHLET:

$$\iint_G (\Delta u)^2 dA = \iint_G \varrho u dA = \text{Max}_{v - \partial v / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma} \left\{ \frac{\left( \iint_G \varrho v dA \right)^2}{\iint_G (\Delta v)^2 dA} \right\}.$$

L'inégalité de convexité (22) se transpose de façon évidente.

### 5.5. Evaluation de $u^2$ et $\iint (\Delta u)^2 dA$ à l'aide de la fonction de Green

Cf. § 4.2:  $\Delta_P \Delta_P g(P, S) = \delta_S$ ,  $g = \partial g / \partial n_P = 0$  pour  $P \in \Gamma$ .

Lorsque la pression vaut  $\delta_S$  (mesure de DIRAC: force unité au point  $S$ ), alors la solution est  $g(P, S)$  et le principe de Dirichlet donne de nouveau (comme le principe de RAYLEIGH au § 4.2):

$$g(S, S) \geq \frac{v^2(S)}{\iint (\Delta v)^2 dA} \text{ pourvu que } v = \partial v / \partial n = 0 \text{ sur } \Gamma; \quad (20)$$

d'où en particulier

$$u^2(S) \leq g(S, S) \iint (\Delta u)^2 dA = g(S, S) \iint \varrho u dA, \quad (24)$$

avec l'égalité si et seulement si  $\varrho = c \delta_S$ ; alors  $u(P) = c g(P, S)$  (cf. [2], p. 277).

Multiplions par  $\varrho(S)$  l'inégalité  $u(S) \leq \sqrt{g(S, S)} \sqrt{\iint \varrho u dA}$  et intégrons dans  $G$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \sqrt{\iint \varrho u dA} &\leq \iint \varrho(S) \sqrt{g(S, S)} dA_S, \\ \iint (\Delta u)^2 dA &= \iint \varrho u dA \leq \left\{ \iint \varrho(S) \sqrt{g(S, S)} dA_S \right\}^2; \end{aligned} \quad (25)$$

avec l'égalité si et seulement si  $\varrho = \text{force ponctuelle} = c \delta_T$ , alors  $u(P) = c g(P, T)$ .  
(24) et (25) donnent

$$u^2(B) \leq g(B, B) \left\{ \iint \varrho(S) \sqrt{g(S, S)} dA_S \right\}^2; \quad (26)$$

on a l'égalité si et seulement si  $\varrho = c \delta_B$ , alors  $u(B) = c g(B, B)$ .

*Cas particulier:*  $\varrho = c \delta_T$ , alors  $u(B) = c g(B, T)$ ; on retrouve (cf. [2], p. 277)

$$g^2(B, T) \leq g(B, B) g(T, T). \quad (27)$$

## 5. 6. Equilibre d'une plaque circulaire encastree, de rayon $R$

5.6.1. Si nous symétrisons les pressions  $\varrho(r, \theta)$  comme au § 5.3, nous obtenons

$$\iint (\Delta \tilde{u})^2 dA \leq \iint (\Delta u)^2 dA. \quad (23')$$

5.6.2. Comme aux §§ 4.2 et 4.3, nous avons  $g(S, S) = s_S^2/16\pi$  et

$$s_S = \frac{R^2 - |OS|^2}{R},$$

donc par (25) et (26):

$$\iint (\Delta u)^2 dA = \iint \varrho u dA \leq \frac{1}{16\pi} R^2 \left\{ \int_{r=0}^R (R^2 - r^2) r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \varrho(r, \theta) d\theta \right\}^2; \quad (28)$$

$$|u(B)| \leq \frac{R^2 - |OB|^2}{16\pi R^2} \left| \int_{r=0}^R (R^2 - r^2) r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \varrho(r, \theta) d\theta \right|. \quad (29)$$

Par exemple, si  $\varrho = \delta_0$ ,  $u(r, \theta) = u(r) = g(r, 0) = (1/8\pi) \{ r^2 \ln(r/R) + (R^2 - r^2)/2 \}$  (cf. § 4.2 et [8], p. 141), tandis que (29) donne la borne  $|u(r)| \leq (R^2 - r^2)/16\pi$ ;  $\iint \varrho u dA = u(0) = g(0, 0) = R^2/(16\pi)$ , ce qui est exactement la borne donnée par (28).

## § 6. Interprétations physiques

### 6.1. Variations des masses sur une membrane vibrante

6.1.1. Dans l'équation différentielle,  $\lambda$  et  $\varrho(x, y)$  apparaissent seulement sous la forme de leur produit  $\lambda \varrho$ ; cela nous permet d'affirmer:

*Si, à module d'élasticité  $E \equiv 1$  inchangé, la masse spécifique devient  $= \lambda_n \varrho(x, y)$ , alors la membrane aura une  $n$ -ième fréquence propre  $\omega_n = 1$ . — La membrane de module d'élasticité  $\equiv E/\lambda_n$  et de masse spécifique  $\varrho(x, y)$  a une  $n$ -ième fréquence propre  $\omega_n = 1$ .*

6.1.2. *Première valeur propre.* — Nous considérons deux membranes vibrantes, couvrant deux exemplaires d'un même domaine  $G$ , et ne différant l'une de l'autre que par leurs masses:

*Première membrane:* module d'élasticité  $E$ , masse spécifique  $\varrho_1(x, y)$ , valeur propre fondamentale  $\lambda_1^{(e_1)}$ .

*Seconde membrane:* module d'élasticité  $E$ , masse spécifique  $\varrho_2(x, y)$ , valeur propre fondamentale  $\lambda_1^{(e_2)}$ .

Nous considérons alors les deux membranes auxiliaires suivantes:

*Troisième membrane:* module d'élasticité  $E/\lambda_1^{(e_1)}$ , masse spécifique  $\varrho_1(x, y)$ , valeur propre fondamentale  $\omega_1^2 = 1$ .

*Quatrième membrane:* module d'élasticité  $E/\lambda_1^{(e_2)}$ , masse spécifique  $\varrho_2(x, y)$ , valeur propre fondamentale  $\omega_1^2 = 1$ .

La troisième et la quatrième membranes ont chacune la fréquence fondamentale  $\omega_1 = 1$ , donc également le système formé par leur réunion.

Superposons la troisième et la quatrième membranes et «collons»-les ensemble point par point: ces contraintes supplémentaires ne peuvent qu'élever les valeurs propres du système-réunion (cf. [5], p. 354): nous obtenons donc une

*Cinquième membrane:* module d'élasticité  $E(1/\lambda_1^{(e_1)} + 1/\lambda_1^{(e_2)})$ , masse spécifique  $\varrho_1 + \varrho_2$ , fréquence fondamentale  $\geq 1$ .

Par conséquent, la

*Sixième membrane:* module d'élasticité  $E$ , masse spécifique  $\varrho_1 + \varrho_2$ , a une valeur propre fondamentale  $\lambda_1^{(e_1 + e_2)} \geq (1/\lambda_1^{(e_1)} + 1/\lambda_1^{(e_2)})^{-1}$ , soit

$$\frac{1}{\lambda_1^{(e_1 + e_2)}} \leq \frac{1}{\lambda_1^{(e_1)}} + \frac{1}{\lambda_1^{(e_2)}};$$

c'est l'inégalité (4).

### 6.1.3. Valeurs propres supérieures

*Première membrane:* module d'élasticité  $E$ , masse spécifique  $\varrho_1(x, y)$ ,  $m$ -ième valeur propre  $\lambda_m^{(e_1)}$ .

*Seconde membrane:* module d'élasticité  $E$ , masse spécifique  $\varrho_2(x, y)$ ,  $n$ -ième valeur propre  $\lambda_n^{(e_2)}$ .

*Troisième membrane:* module d'élasticité  $E/\lambda_m^{(e_1)}$ , masse spécifique  $\varrho_1(x, y)$ ,  $m$ -ième valeur propre 1.

*Quatrième membrane:* module d'élasticité  $E/\lambda_n^{(e_2)}$ , masse spécifique  $\varrho_2(x, y)$ ,  $n$ -ième valeur propre 1.

Le système formé par la réunion de la troisième et de la quatrième membranes, a  $(m-1) + (n-1)$  fréquences propres  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{m+n-2} \leq 1$ , tandis que son  $\omega_{m+n-1} = \omega_{m+n} = 1$ .

Superposons la troisième et la quatrième membranes et «collons»-les en chaque point, ce qui ne peut qu'élever toutes les fréquences propres  $\omega_i$  du système-réunion (cf. [5], p. 354): nous obtenons une membrane (sur  $G$ ) de module d'élasticité  $E(1/\lambda_m^{(e_1)} + 1/\lambda_n^{(e_2)})$ , de masse spécifique  $= \varrho_1 + \varrho_2$ , et de  $(m+n-1)$ -ième valeur propre  $\geq 1$ . Par conséquent: la membrane de module d'élasticité  $E$  et de masse spécifique  $\varrho_1 + \varrho_2$ , a une  $(m+n-1)$ -ième valeur propre  $\lambda_{m+n-1}^{(\varrho_1 + \varrho_2)} \geq (1/\lambda_m^{(e_1)} + 1/\lambda_n^{(e_2)})^{-1}$ , ce qui exprime précisément (5).

6.1.4. Remarque: La symétrisation alternée (§ 1.7.1 b) s'interprète simplement par le fait qu'une coupure de la corde ne peut qu'abaisser les valeurs propres.

## 6.2. Variation du potentiel dans l'équation de Schrödinger

Considérée pour deux dimensions seulement, l'équation

$$E \Delta u + [\lambda \varrho(x, y) - W(x, y)] u = 0$$

est exactement celle d'une membrane (module d'élasticité  $E$ , masse spécifique  $\varrho(x, y)$ ), dont chaque élément d'aire  $dA$  (au point  $(x, y)$ ) est en outre rappelé vers sa position d'équilibre  $u = 0$  par un ressort infinitésimal de coefficient élastique  $W(x, y) dA$ . — Appelons  $\lambda_n$  la  $n$ -ième valeur propre avec  $\varrho(x, y) \equiv E = 1$ . On voit immédiatement:

*La membrane homogène de module d'élasticité 1, masse spécifique  $\equiv \lambda_n$  et «ressorts intérieurs»  $W(x, y)$ , a une  $n$ -ième valeur propre  $\omega_n^2 = 1$ .*

Nous considérons de nouveau deux membranes vibrantes (sur deux domaines congruents):

*Première membrane:* module d'élasticité 1, masse spécifique 1, «ressorts intérieurs»  $W_1(x, y)$ ,  $m$ -ième valeur propre  $\lambda_m^{(W_1)}$ .

*Seconde membrane:* module d'élasticité 1, masse spécifique 1, «ressorts intérieurs»  $W_2(x, y)$ ,  $n$ -ième valeur propre  $\lambda_n^{(W_2)}$ .

Nous considérons, à leur place, les membranes auxiliaires suivantes:

*Troisième membrane:* module d'élasticité 1, masse spécifique  $\lambda_m^{(W_1)}$ , ressorts intérieurs  $W_1$ ,  $m$ -ième valeur propre  $\omega_m^2 = 1$ .

*Quatrième membrane:* module d'élasticité 1, masse spécifique  $\lambda_n^{(W_2)}$ , ressorts intérieurs  $W_2$ ,  $n$ -ième valeur propre  $\omega_n^2 = 1$ .

Système {troisième + quatrième membranes}:  $\omega_{m+n-1} = \omega_{m+n} = 1$ .



Superposons la troisième et la quatrième membranes et «collons»-les en chaque point: ces contraintes supplémentaires ne peuvent qu'élever  $\omega_{m+n-1}$  (cf. [5], p. 354):

*Cinquième membrane:* module d'élasticité 2, masse spécifique =  $\lambda_m^{(W_1)} + \lambda_n^{(W_2)}$ , ressorts intérieurs  $W_1 + W_2$ ,  $\omega_{m+n-1} \geq 1$ .

*Sixième membrane:* module d'élasticité 1, masse spécifique =  $(\lambda_m^{(W_1)} + \lambda_n^{(W_2)})/2$ , ressorts intérieurs  $(W_1 + W_2)/2$ ,  $\omega_{m+n-1} \geq 1$ .

*Septième membrane:* module d'élasticité 1, masse spécifique 1, ressorts intérieurs  $(W_1 + W_2)/2$ , valeur propre  $\lambda_{m+n-1}^{[(W_1+W_2)/2]} \geq (\lambda_m^{(W_1)} + \lambda_n^{(W_2)})/2$ , ce qui illustre l'inégalité (18) (ici par exemple pour  $c = 1/2$ ), ou (16).

6.3. Variation des pressions dans un problème du type de Poisson

Considérons, par exemple, le problème de l'équilibre d'une membrane chargée:

$$E \Delta u = - \varrho(x, y) \text{ dans } G, \quad u = 0 \text{ sur la frontière } \Gamma.$$

( $\varrho(x, y)$  = pression;  $E$  = module d'élasticité.) Energie potentielle pour la position d'équilibre:  $E D(u)/2 - \iint \varrho u \, dA = - E D(u)/2$ .

*Première membrane:* module d'élasticité 1, pression  $\varrho_1(x, y)$ , énergie potentielle =  $- D(u_{\varrho_1})/2 = - D_1/2$ .

*Seconde membrane:* module d'élasticité 1, pression  $\varrho_2(x, y)$ , énergie potentielle =  $- D(u_{\varrho_2})/2 = - D_2/2$ .

Nous considérons à présent les membranes auxiliaires suivantes (en équilibre également):

*Troisième membrane:* module d'élasticité  $1/2$ , pression  $\varrho_1/2$ , énergie potentielle =  $- D_1/4$ .

*Quatrième membrane:* module d'élasticité  $1/2$ , pression  $\varrho_2/2$ , énergie potentielle =  $- D_2/4$ .

*Cinquième membrane:* module d'élasticité  $k_1/2$ , pression  $\varrho_1/2$ , énergie potentielle =  $- D_1/4 k_1$ .

*Sixième membrane:* module d'élasticité  $k_2/2$ , pression  $\varrho_2/2$ , énergie potentielle =  $- D_2/4 k_2$ .

Superposons la cinquième et la sixième membranes et «collons»-les en chaque point. Avant collage, l'énergie potentielle d'équilibre du système [cinquième + sixième membranes] était égale à  $-(1/4) (D_1/k_1 + D_2/k_2)$ ; après collage, le système a moins de liberté pour réaliser le minimum de l'énergie potentielle, donc ce minimum (correspondant à l'équilibre) devient plus élevé:

*Septième membrane:* module d'élasticité  $(k_1 + k_2)/2$ , pression  $(\varrho_1 + \varrho_2)/2$ , énergie potentielle  $\geq -(1/4) (D_1/k_1 + D_2/k_2)$ .

*Huitième membrane:* module d'élasticité 1, pression  $(\varrho_1 + \varrho_2)/2$ , énergie potentielle =  $- D(u_{(\varrho_1+\varrho_2)/2})/2 \geq -(k_1 + k_2) (D_1/k_1 + D_2/k_2)/8$ .

Nous avons donc l'évaluation

$$4 D \binom{u_{e_1+e_2}}{2} \leq (k_1 + k_2) \left( \frac{D_1}{k_1} + \frac{D_2}{k_2} \right) = D_1 + D_2 + D_1 \frac{k_2}{k_1} + D_2 \frac{k_1}{k_2} \\ = \left( \sqrt{D_1} + \sqrt{D_2} \right)^2 + \left( \sqrt{D_1 \frac{k_2}{k_1}} - \sqrt{D_2 \frac{k_1}{k_2}} \right)^2.$$

Cette évaluation est la meilleure possible si l'on choisit  $k_2/k_1 = \sqrt{D_2/D_1}$ , on retrouve alors bien l'inégalité de convexité (22).

### Post-scriptum

a) G. PÓLYA et M. SCHIFFER: *Convexity of functionals by transplantation*, J. d'Analyse Math. 3 (2<sup>e</sup> partie), 245–345 (1953/54), notamment p. 286–290, ont établi des propriétés de convexité pour  $\sum_1^n \lambda_i$  et pour  $\sum_1^n \lambda_i^{-1}$  qui généralisent (4), (6') et (16) dans un sens différent de (5), (6) et (18), c'est-à-dire autrement que les inégalités de H. WEYL.

Voir aussi dans cet ordre d'idées mes deux notes: *Caractérisation variationnelle d'une somme de valeurs propres consécutives; généralisation d'inégalités de Pólya-Schiffer et de Weyl*, C. R. Acad. Sci. Paris 252, 1714 (1961); et *Inégalités pour des valeurs propres consécutives de systèmes vibrants inhomogènes, allant «en sens inverse» de celles de Pólya-Schiffer et de Weyl*, C. R. Acad. Sci. Paris 252, 2496 (1961). – Voici quelques exemples de ces inégalités:

$$\frac{1}{\lambda_1^{(e_1+e_2)}} \leq \frac{1}{\lambda_1^{(e_1)}} + \frac{1}{\lambda_1^{(e_2)}} \leq \frac{1}{\lambda_1^{(e_1+e_2)}} + \frac{1}{\lambda_2^{(e_1+e_2)}}; \quad (30)$$

$$\frac{1}{\lambda_1^{(e_1+e_2)}} + \frac{1}{\lambda_2^{(e_1+e_2)}} \leq \left( \frac{1}{\lambda_1^{(e_1)}} + \frac{1}{\lambda_2^{(e_1)}} \right) + \left( \frac{1}{\lambda_1^{(e_2)}} + \frac{1}{\lambda_2^{(e_2)}} \right) \\ \leq \frac{1}{\lambda_1^{(e_1+e_2)}} + \frac{1}{\lambda_2^{(e_1+e_2)}} + \frac{1}{\lambda_3^{(e_1+e_2)}} + \frac{1}{\lambda_4^{(e_1+e_2)}} \quad (31)$$

(l'inégalité de gauche est de PÓLYA-SCHIFFER).

L'exemple considéré ici aux §§ 1.4.1 et 1.7.1(d) illustre bien ces inégalités: (30) donne

$$\frac{1}{\pi^2} \leq \frac{2}{\lambda_1^{(e_1)}} \leq \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2},$$

soit  $1,6\pi^2 \leq \lambda_1^{(e_1)} \leq 2\pi^2$  (en réalité  $\lambda_1^{(e_1)} \simeq 16,47$ ); (31) donne

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} \leq 2 \left( \frac{1}{\lambda_1^{(e_1)}} + \frac{1}{\lambda_2^{(e_1)}} \right) \leq \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2},$$

soit

$$\frac{5}{8\pi^2} \leq \frac{1}{\lambda_1^{(e_1)}} + \frac{1}{\lambda_2^{(e_1)}} \leq \frac{205}{288\pi^2},$$

c'est-à-dire

$$0,0633 \leq \frac{1}{\lambda_1^{(e_1)}} + \frac{1}{\lambda_2^{(e_1)}} \leq 0,0721$$

$$\left( \text{en réalité } \frac{1}{\lambda_1^{(e_1)}} + \frac{1}{\lambda_2^{(e_1)}} \simeq \frac{1}{16,47} + \frac{1}{96,56} \simeq 0,071 \right).$$

Dans l'exemple du § 1.3.1,  $\lambda_2^{(e_1+e_2)} = \lambda_2^{(e_1)} = 4\pi^2$ ; (30) donne donc

$$\frac{1}{\alpha^2} \leq \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4\pi^2},$$

soit

$$\frac{3}{4\pi^2} \leq \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{2\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \leq \frac{1}{\pi^2}$$

pour  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

b) L'inégalité (11) peut être précisée par la relation connue

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^{(e)}} = \int \varrho(\xi) g(\xi, \xi) d\xi,$$

qui est une conséquence du théorème de MERCER, cf. R. COURANT et D. HILBERT [5], et B. SCHWARZ: *Bounds for sums of reciprocals of eigenvalues*, Bull. Res. Coun. Israel, 8F, 91–102 (1959), notamment p. 94. Une interprétation en est indiquée dans ma note citée en dernier lieu ci-dessus. — On peut ainsi préciser également (12), (13), (11'), (21); on comprend pourquoi on y a l'égalité si et seulement si toute la masse est concentrée en un point: alors  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \dots = +\infty$ , la somme infinie se réduit à son premier terme.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. R. BEESACK, *Isoperimetric Inequalities for the Nonhomogeneous Clamped Rod and Plate*. J. Math. and Mech. 8, 471–482 (1959).
- [2] S. BERGMAN et M. SCHIFFER, *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics* (Academic Press 1953).
- [3] M. BÔCHER, *Leçons sur les méthodes de Sturm* (Paris, 1917).
- [4] L. COLLATZ, *Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung* (Akad. Verlagsges. 1944 & Chelsea publications 1948).
- [5] R. COURANT et D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Bd. 1 (Springer, 1931).
- [6] J. HERSCH, *Une symétrisation différente de celle de Steiner*. L'Enseignement Math., 2e série, 5, 219 (1959).

- [7] Z. NEHARI, *On the Principal Frequency of a Membrane*. Pacific J. Math. 8, 285–293 (1958).
- [8] G. PÓLYA et G. SZEGÖ, *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (Princeton University Press, 1951).
- [9] BINYAMIN SCHWARZ, *Bounds for the Principal Frequency of the Nonhomogeneous Membrane and for the Generalized Dirichlet Integral*. Pacific J. Math. 7, 1653–1676 (1957).
- [10] R. V. SOUTHWELL, *An Introduction to the Theory of Elasticity*. 2nd ed. (Oxford University Press 1941).
- [11] H. WEYL, *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*. Math. Annalen 71, 441–479 (1912).

### Summary

General inequalities of type (5) for eigenvalues were established as early as 1912 by H. WEYL [11] through consideration of integral equations; he used them for studying the asymptotic behaviour of  $\lambda_n$  when  $n \rightarrow \infty$ . These inequalities seem to have been forgotten, as some of them were independently re-discovered by several authors (see [4], p. 314 and [10], pp. 483–484). – Such inequalities are here derived and applied in various ways to special problems (vibrating strings, rods, membranes and plates). Explicit lower bounds for  $\lambda_1$  are obtained in a somewhat similar manner in terms of the GREEN'S function. For SCHRÖDINGER'S equation (15'), the very simple inequalities (17') are found. Analogous inequalities are established for a class of equilibrium problems. Many of the inequalities thus obtained express convexity properties (cf. the *Post-scriptum* above and the paper by PÓLYA and SCHIFFER quoted there).

(Reçu: le 3 décembre 1960.)

## Green's Function for Laplace's Equation in a Circular Ring with Radiation Type Boundary Conditions

By JAMES F. HEYDA, Cincinnati, Ohio, USA<sup>1)</sup>

### 1. Introduction

Let  $(r, \theta)$  be the polar coordinates of a point of the circular ring  $0 < r_1 < r < r_2$  and consider the problem of solving Poisson's equation,

$$\nabla^2 T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = -F(r, \theta), \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Aircraft Nuclear Propulsion Department, General Electric Company.



subject to the boundary conditions

$$\frac{\partial T}{\partial r} - h_1 T \Big|_{r=r_1} = \phi_1(r_1, \theta) \quad (h_1 \geq 0), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + h_2 T \Big|_{r=r_2} = \phi_2(r_2, \theta) \quad (h_2 \geq 0), \tag{3}$$

where the source function  $F$  and the functions  $\phi_1, \phi_2$  are given.

Equation (1) describes the flow of heat in a long hollow cylinder, the flow taking place in planes perpendicular to its axis, with  $h_i = H_i/k$ , where  $H_i$  is the coefficient of surface heat transfer at  $r = r_i$  and  $k$  is the thermal conductivity of the cylinder material. We shall assume the  $h_i$  constant.

When  $\phi_1 = \phi_2 \equiv 0$ , the boundary conditions (2), (3) describe cooling by forced convection and are sometimes referred to as radiation boundary conditions.

The solution of the problem defined by equations (1), (2) and (3) is

$$T(r, \theta) = \iint_{\dot{R}} G(r, \theta; r_0, \theta_0) F(r_0, \theta_0) dA_0 + \int_C \phi(r_0, \theta_0) G(r, \theta; r_0, \theta_0) ds_0, \tag{4}$$

where  $G(r, \theta; r_0, \theta_0)$  is the appropriate GREEN's function;  $dA_0$  is an element of area of the plane annulus  $R: r_1 < r < r_2$ ;  $C$  is the complete boundary of  $R$ ; the function  $\phi = \phi_i$  when  $r_0 = r_i$  and  $ds_0$  is an element of arclength on  $C$ .

2. Derivation of  $G(r, \theta; r_0, \theta_0)$

It is convenient to denote the point  $(r, \theta)$  by the vector  $z = r e^{i\theta}$  and to write  $G(r, \theta; r_0, \theta_0) \equiv G(z, z_0)$ . The GREEN's function  $G(z, z_0)$ , where  $z, z_0$  are distinct points of  $R$ , is defined to be the solution of

$$\nabla^2 G(z, z_0) = -\delta(z - z_0) \tag{5}$$

with the boundary conditions

$$\frac{\partial G}{\partial r} + (-1)^i h_i G \Big|_{r=r_i} = 0 \quad (i = 1, 2). \tag{6}$$

It may be written

$$G = G^* + S, \tag{7}$$

where the singular component  $S$  is given by

$$S(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \log (r e^{i\theta} - r_0 e^{i\theta_0}) \tag{8}$$

and the non-singular component  $G^*$  is a solution of  $\nabla^2 G = 0$  subject to condition (6).

One shows readily that

$$\left. \begin{aligned} S(z, z_0) &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\log r + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n \cos n(\theta - \theta_0) \right], & (r_0 < r) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\log r_0 + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \cos n(\theta - \theta_0) \right], & (r_0 > r), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

while the most general  $G^*$  in terms of circular harmonics is

$$\left. \begin{aligned} G^*(z, z_0) &= A_0 + B_0 \log r + \sum_1^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta \\ &\quad + \sum_1^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

wherein the 'constants'  $A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) are now to be determined so that

$$\frac{\partial G^*}{\partial r} + (-1)^i h_i G^* \Big|_{r=r_i} = -\frac{\partial S}{\partial r} + (-1)^{i-1} h_i S \Big|_{r=r_i} \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

Finding and simplifying these 'constants', although somewhat of a prodigious task, is well worth the effort in view of the reasonably simple results. One finds, upon introducing the substitutions

$$\frac{r}{r_1} = e^\eta, \quad \frac{r_0}{r_1} = e^{\eta_0}, \quad \frac{r_2}{r_1} = e^{\eta_2} \quad (0 \leq \eta, \eta_0 \leq \eta_2), \quad (12)$$

that

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\left( h_1 \eta_0 + \frac{1}{r_1} \right) \left( h_2 \ln r_2 + \frac{1}{r_2} \right)}{h_1 h_2 \eta_2 + \frac{n_2}{r_1} + \frac{h_1}{r_2}}, \quad (13)$$

$$B_0 = \frac{h_1}{2\pi} \frac{h_2 (\eta_2 - \eta_0) + \frac{1}{r_2}}{h_1 h_2 \eta_2 + \frac{h_2}{r_1} + \frac{h_1}{r_2}}, \quad (14)$$

$$A_n = \frac{-\cos n\theta_0}{2\pi r_2^n} \left[ \frac{h_1 \left( \frac{h_2}{n} - \frac{1}{r_2} \right) \sinh n\eta_0 + \frac{1}{r_1} \left( h_2 - \frac{n}{r_2} \right) \cosh n\eta_0}{\left( \frac{n^2}{r_1 r_2} + h_1 h_2 \right) \sinh n\eta_2 + n \left( \frac{h_1}{r_2} + \frac{h_2}{r_1} \right) \cosh n\eta_2} \right], \quad (15)$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{-r_1^n \cos n\theta_0}{2\pi} \left[ \frac{h_2 \left( h_1 - \frac{1}{r_1} \right) \sinh n(\eta_2 - \eta_0) + \frac{1}{r_2} \left( h_1 - \frac{n}{r_1} \right) \cosh n(\eta_2 - \eta_0)}{\left( \frac{n^2}{r_1 r_2} + h_1 h_2 \right) \sinh n\eta_2 + n \left( \frac{h_1}{r_2} + \frac{h_2}{r_1} \right) \cosh n\eta_2} \right], \\ \frac{C_n}{A_n} &= \frac{D_n}{B_n} = \tan n\theta_0. \end{aligned} \quad (17)$$

The final form of the GREEN's function  $G(r, \theta; r_0, \theta_0)$  may now be obtained by substituting the above evaluations of  $A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n$  into equation (10) and combining the result with equation (9) in accordance with relation (7). After much algebraic refinement, the final result turns out to be:

For  $r_1 \leq r_0 < r \leq r_2$ , i.e., for  $0 \leq \eta_0 < \eta \leq \eta_2$ ,

$$G(\eta, \theta; \eta_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\left(h_1 \eta_0 + \frac{1}{r_1}\right) \left(h_2 [\eta_2 - \eta] + \frac{1}{r_2}\right)}{h_1 h_2 \eta_2 + \frac{h_2}{r_1} + \frac{h_1}{r_2}} \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{r_1} \cosh n \eta_0 + h_1 \sinh n \eta_0\right) \left(\frac{1}{r_2} \cosh n (\eta_2 - \eta) + \frac{h_2}{n} \sinh n (\eta_2 - \eta)\right)}{\left(\frac{n^2}{r_1 r_2} + h_1 h_2\right) \sinh n \eta_2 + n \left(\frac{h_2}{r_1} + \frac{h_1}{r_2}\right) \cosh n \eta_2} \cos n (\theta - \theta_0) \right|. \tag{18}$$

Since  $G(z, z_0)$  is symmetric in  $z, z_0$ , the form of  $G$  when  $r_1 \leq r < r_0 \leq r_2$  is obtained from equation (18) by interchanging  $\eta$  and  $\eta_0$ .

### 3. Green's Function Vanishing on the Ring Boundaries

By letting  $h_1 \rightarrow \infty, h_2 \rightarrow \infty$  in formula (18) we obtain

$$G(\eta, \theta; \eta_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\eta_0 (\eta_2 - \eta)}{\eta_2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n \eta_0 \sinh n (\eta_2 - \eta)}{n \sinh n \eta_2} \cos n (\theta - \theta_0) \right], \tag{19}$$

a reasonably simple form of the GREEN's function which vanishes on the outer circle  $r = r_2$ , i.e.,  $\eta = \eta_2$ . Equation (19) applies when  $0 \leq \eta_0 < \eta \leq \eta_2$ ; the applicable form when  $0 \leq \eta < \eta_0 \leq \eta_2$  is obtained from (19) by interchanging  $\eta$  and  $\eta_0$ , thereby yielding the GREEN's function which vanishes on the inner circle  $\eta = 0$ .

This case is treated by HILBERT and COURANT [1]<sup>2)</sup> who derive the equivalent of (19) using complex variable methods. Although their analysis is short and painless, their final result, expressed in terms of theta functions, does not lend itself easily to analytical computations. It is of some interest to show that the two results, superficially very dissimilar, are indeed equivalent.

HILBERT-COURANT take  $r_1 = q^{1/2}, r_2 = q^{-1/2}$ , ( $0 < q < 1$ ), so that  $r_1 r_2 = 1$ . Free of the theta function notation, their result is

$$G(z, z_0) = -\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} \log q + \log |z^{-\log z_0 / \log q}| + \log \left| \sqrt{\frac{z}{z_0}} - \sqrt{\frac{z_0}{z}} \right| + \log |Q| \right], \tag{20}$$

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 327.

where

$$Q = \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - q^{2\nu} \frac{z}{z_0}\right) \left(1 - q^{2\nu} \frac{z_0}{z}\right)}{\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - q^{2\nu-1} z_0 z\right) \left(1 - \frac{q^{2\nu-1}}{z_0 z}\right)}. \quad (21)$$

It is sufficient to compare (19) and (20) for  $z_0$  real, i.e.  $z_0 = r_0$ ,  $\theta_0 = 0$  or  $\pi$ . To be specific we take  $\theta_0 = 0$ . Equation (20) can then be rewritten, when  $r_0 < r$ , as

$$2\pi G = \frac{1}{2} \left[ \frac{\log r_0 \log r}{\log r_1} - \log \frac{r r_1}{r_0} \right] - \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 2 \frac{r_0}{r} \cos \theta \right] - \log |Q|. \quad (22)$$

It is then a simple matter to identify the term

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\log r_0 \log r}{\log r_1} - \log \left( \frac{r r_1}{r_0} \right) \right]$$

with the term  $\eta_0(\eta_2 - \eta)/\eta_2$  of equation (19). It remains then to show that

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n \eta_0 \sinh n (\eta_2 - \eta)}{n \sinh n \eta_2} \cos n \theta = -\frac{1}{2} \log \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 2 \left( \frac{r_0}{r} \right) \cos \theta \right] - \log |Q|. \quad (23)$$

On the right side of equation (23) we have, for the first term, the known expansion

$$-\frac{1}{2} \log \left[ 1 + \left( \frac{r_0}{r} \right)^2 - 2 \frac{r_0}{r} \cos \theta \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r_0}{r} \right)^n \frac{\cos n \theta}{n}. \quad (24)$$

From equation (21),

$$\log |Q| = \log \prod_{\nu=1}^{\infty} \left| 1 - r_1^{4\nu} \frac{z}{r_0} \right| + \log \prod_{\nu=1}^{\infty} \left| 1 - r_1^{4\nu} \frac{r_0}{z} \right| - \log \prod_{\nu=1}^{\infty} \left| 1 - r_1^{4\nu-2} r_0 z \right| - \log \prod_{\nu=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{r_1^{4\nu-2}}{r_0 z} \right|. \quad (25)$$

Consider the first term of equation (25). We may write

$$\log \prod_{\nu=1}^{\infty} \left| 1 - r_1^{4\nu} \frac{z}{r_0} \right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \log \left| 1 - r_1^{4\nu} \frac{z}{r_0} \right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \left( r_1^{4\nu} \frac{r}{r_0} \right)^2 - 2 \left( r_1^{4\nu} \frac{r}{r_0} \right) \cos \theta \right]. \quad (26)$$

Since

$$r_1^{4\nu} \frac{r}{r_0} < r_1^{4\nu} \frac{1}{r_1^2} = r_1^{4\nu-2} \leq r_1^2 < 1 \text{ for } \nu = 1, 2, \dots,$$

we may rewrite (26) as

$$\left. \begin{aligned} \log \prod_{\nu=1}^{\infty} \left| 1 - r_1^{4\nu} \frac{r}{r_0} \right| &= - \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} r_1^{4\nu n} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \frac{\cos n \theta}{n} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1^{4n}}{1 - r_1^{4n}} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \frac{\cos n \theta}{n}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

where we have used an expansion as in (24), interchanged orders of summation (which is permissible here) and summed the resulting geometric series. Observing that  $\eta_2 = -2 \log r_1$ , we may write finally

$$\log \prod_{\nu=1}^{\infty} \left| 1 - r_1^{4\nu} \frac{r}{r_0} \right| = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \frac{r_1^{2n} \cos n \theta}{n \sinh n \eta_2}. \quad (27)$$

Proceeding similarly with the other terms of (25) one easily obtains the result

$$-\log |Q| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_1^{2n} \cosh \left( n \log \frac{r}{r_0} \right)}{n \sinh n \eta_2} \cos n \theta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh (n \log r r_0)}{n \sinh n \eta_2} \cos n \theta, \quad (29)$$

whence it is a simple matter to show that when (29) and (24) are added and simplified, the result is the required left member of (23).

Other specializations of the general form (18) are also of interest. Thus one might keep  $h_1$  finite and let  $h_2 \rightarrow \infty$ , as would be required in determining the steady temperature in a long hollow cylinder with cooling at the inner surface and temperature 0 at the outer surface.

The form (19) is only slightly more involved when the ring boundaries are non-concentric. This result, involving bi-polar coordinates, was previously presented by the writer in reference [2].

## REFERENCES

- [1] R. COURANT and D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics, I* (New York and London 1953), pp. 386-388.
- [2] J. F. HEYDA, *A Green's Function Solution for the Case of Laminar Incompressible Flow Between Non-Concentric Circular Cylinders*, J. Franklin Institute, 267, 1, 25-34 (1959).



*Zusammenfassung*

Es wird die Greensche Funktion der Laplaceschen Gleichung für einen Kreisring hergeleitet, wobei Randbedingungen vom Strahlungstyp angenommen sind. In demjenigen Spezialfall, in dem die Randbedingungen das Verschwinden der Greenschen Funktion verlangen, wird gezeigt, dass die gefundene Darstellung der Greenschen Funktion übereinstimmt mit der Formel, wie sie im Buch von HILBERT-COURANT unter Verwendung von Thetafunktionen hergeleitet ist.

(Received: October 10, 1960.)

## A Boundary-Layer in a Non-Newtonian Fluid

By JOHN R. JONES, Swansea, Great Britain<sup>1)</sup>

### 1. Introduction

The boundary-layer theory was developed by PRANDTL [1]<sup>2)</sup> for fluids of constant viscosity, initially for the case of laminar flow, and later was extended to include compressible viscous fluids and turbulent flow in the boundary-layer. In recent years experiments have shown that several phenomena observable in fluids are not predicted by the classical theory of viscous flow. This has led to the formulation of more complicated rheological equations of state, either deduced from a molecular picture or microscopic model of the material, or based on idealizations of simple experiments. The invariant forms of rheological equations of state for a homogeneous continuum, suitable for application to all conditions of motion and of stress, have been discussed generally by OLDROYD [2]; restrictions are imposed on their form by the physical conditions that the rheological properties they describe are independent of the frame of reference and independent of the motion of the material element in space. With the growing interest in non-Newtonian behaviour it seems that one should now, if possible, extend the boundary-layer theory so as to include a wider range of fluids. In the present paper the effect of a variation of viscosity with rate of shear and of a normal-stress coefficient (representing 'cross-viscosity') are examined in a simple type of two-dimensional boundary-layer. For reasons of mathematical convenience the case which is worked out in detail, by way of illustration, is one in which the viscosity coefficient is a linear function of the rate of shear, the normal-stress coefficient is arbitrary and the mainstream velocity is proportional to the one-third power of distance measured from a stagnation point. It is of interest to note

<sup>1)</sup> Department of Applied Mathematics, University College of Swansea.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 343.

that some of the effects found here are qualitatively the same as those found when the compressibility of the fluid is taken into account (see, for example, SCHLICHTING [3]).

## 2. The Equations Governing Non-Newtonian Flow

There are various theories regarding different types of rheological behaviour. The simplest of all is based on the assumption that, apart from an isotropic pressure, the stress in an element of incompressible fluid at any instant is determined uniquely by the instantaneous rate of strain. In this case the rheological equations of state are of the form

$$p_{ik} = -p \delta_{ik} + p'_{ik}, \quad (1)$$

where the partial stress tensor  $p'_{ik}$  is an algebraic function of the rate-of-strain tensor

$$e_{ik} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (2)$$

at the same position and time only, and  $p$  is an undetermined isotropic pressure which varies with position and time in a way determined by the equations of motion. Here  $v_i$  is the velocity vector referred to Cartesian coordinates  $x_i$  and  $\delta_{ik}$  is the Kronecker delta. On the assumption that the material is inherently isotropic and that the stresses can be expanded as power series in the rates-of-strain, RIVLIN [4] has shown that the most general possible equation of the type (1) may be written in the form

$$p_{ik} = -p \delta_{ik} + 2\eta e_{ik} + 4\zeta e_{ij} e_{jk}, \quad (3)^3$$

where the coefficients  $\eta$  and  $\zeta$  are arbitrary scalar functions of the flow invariants

$$I_1 \equiv e_{ii}, \quad I_2 \equiv \frac{1}{2} [(e_{ii})^2 - e_{ik} e_{ik}], \quad I_3 \equiv \det(e_{ik}), \quad (4)$$

subject to conditions (such as  $\eta > 0$ ) dictated by thermodynamic principles. We can consider equation (3) coupled with the incompressibility condition  $I_1 = 0$  as a useful prototype set of equations of state for detailed study, on the grounds of mathematical simplicity, without accepting RIVLIN's contention that his assumption of a power-series expansion will be generally valid. A formula of the form (3) in which the coefficients  $\eta$  and  $\zeta$  are physical constants has been discussed by REINER [5]; REINER considers the material to be compressible and accordingly the quantity  $p$  is a function of the density i. e. of the dilatation.

<sup>3</sup>) The usual convention of summation over the values  $x, y, z$  applies to all repeated Latin suffixes except  $x, y, z$ .

Referred to a suitably chosen orthogonal Cartesian frame of reference  $x, y, z$ , the components of velocity in any two-dimensional motion may be taken as

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad w = 0. \quad (5)$$

The equation of continuity

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

is the condition for the existence of a stream function  $\psi(x, y, t)$  such that

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

In terms of  $\psi$  the non-vanishing components of the rate-of-strain tensor  $e_{ik}$  and of  $e_{ij} e_{jk}$  are

$$e_{xx} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad e_{yy} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y},$$

$$e_{xj} e_{jx} = e_{yj} e_{jy} = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2.$$

On substituting these values in (3) it is found that the stresses are

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p^* - 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, & p_{xy} &= \eta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \\ p_{yy} &= -p^* + 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, & p_{zz} &= -p^* - \zeta \left[ 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right. \\ & & & \left. + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 \right], & p_{yz} &= p_{zx} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

where

$$p^* = p - \zeta \left[ 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

The shear stress  $p_{xy}$  is independent of the normal-stress coefficient and is the same as if the fluid possessed a single variable coefficient of viscosity  $\eta$ , and the normal stresses  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{zz}$  are in general unequal.

The stress equations of motion

$$\varrho \left( \frac{Dv_i}{Dt} + \frac{\partial U}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \quad (10)$$

(where  $D/Dt \equiv \partial/\partial t + v_j \partial/\partial x_j$ ,  $\varrho$  is the density of the fluid, and  $U$  is the potential of the body forces per unit mass) require

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \varrho \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial p^*}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( 2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left[ \eta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right], \quad (11)$$

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \varrho \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial p^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \eta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left( 2 \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), \quad (12)$$

where  $p^* = p^*(x, y, t)$ . Eliminating  $p^*$  from equations (11) and (12) we obtain, as the equation determining  $\psi$ ,

$$\varrho \left[ \frac{\partial \nabla_1^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \nabla_1^2 \psi)}{\partial(x, y)} \right] = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \eta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), \quad (13)$$

where

$$\nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (14)$$

It is seen that equation (13) is independent of the normal-stress coefficient  $\zeta$ , and so too are the boundary conditions (taken to be those expressing no slip at a rigid boundary) on  $\psi$ . Thus the velocity distribution for a general two-dimensional motion is the same as that in a purely viscous fluid characterized by a single variable coefficient of viscosity  $\eta$ .

The flow invariants in two-dimensional flow are

$$I_1 = 0, \quad I_2 = -\frac{1}{4} \gamma^2, \quad I_3 = 0, \quad (15)$$

where

$$\gamma = \left[ 4 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 \right]^{1/2}; \quad (16)$$

the index  $1/2$  is intended as the positive root throughout. It is easily seen that  $\gamma$  has a direct physical significance as the rate of shear at any point. It follows from (15) that the viscosity coefficient and the normal-stress coefficient are in the most general case arbitrary functions of  $\gamma$ . We shall in what follows confine attention to the particular class of fluids characterized by an arbitrary normal-stress coefficient and a viscosity coefficient which is a linear function of  $\gamma$ , i.e.

$$\eta = \eta_0 (1 - \alpha \gamma), \quad \zeta = \zeta(\gamma), \quad (17)$$

where  $\eta_0$  and  $\alpha$  are physical constants. The viscosity coefficient  $\eta$  is of necessity positive and this requires

$$\eta_0 \geq 0, \quad 1 - \alpha \gamma \geq 0 \quad (\text{all } x, y, t). \quad (18)$$

Also, for physical interest, the shear stress must be a monotonic increasing function of the rate-of-strain, and we shall therefore have to restrict attention to regions in which

$$\eta_0 \geq 0, \quad 1 - 2\alpha\gamma \geq 0. \quad (19)$$

This restriction (which is stronger than (18)) imposes a limitation on the type of two-dimensional flow of these simple prototype fluids that we can study.

The equations (11), (12) and (13) reduce to

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial x} = -\eta_0 \frac{\partial \nabla_1^2 \psi}{\partial y} + \eta_0 \alpha \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \gamma \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] \right\}, \quad (20)$$

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial y} = \eta_0 \frac{\partial \nabla_1^2 \psi}{\partial x} - \eta_0 \alpha \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \gamma \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right\}, \quad (21)$$

$$\varrho \left[ \frac{\partial \nabla_1^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \nabla_1^2 \psi)}{\partial(x, y)} \right] = \eta_0 \nabla_1^4 \psi - \eta_0 \alpha \left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left[ \gamma \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \right] + 4 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right\}, \quad (22)$$

where the potential function  $\varrho U$  has now been incorporated in  $p^{*4}$ . When accelerations are zero or are negligible and the viscosity is invariable ( $\alpha = 0$ ) equation (22) reduces to the biharmonic equation.

The rate at which work is being done per unit volume in changing the shape of an incompressible material is, in any motion,

$$\Phi = \dot{p}_{ik} e_{ik}, \quad (23)$$

independent of the rheological properties of the material. In any two-dimensional motion of an incompressible fluid characterized by (3),  $\Phi = 2 \eta e_{ik} e_{ik}$ , unaffected by  $\zeta$ , and when  $\eta$  is given by (17) we have

$$\Phi = 2 \eta_0 (1 - \alpha \gamma) \gamma^2. \quad (24)$$

### 3. The Boundary-Layer Equations

The arguments leading to a boundary-layer theory are very much the same as the familiar ones of PRANDTL. It may happen that the typical length appropriate to the coordinates  $x$  and  $y$  are different, they may be written  $d$  and  $\varepsilon d$ , with  $\varepsilon \leq 1$  without loss of generality. If  $V$  is a typical  $u$ , we define dimensionless variables

$$\left. \begin{aligned} x &= x' d, & y &= y' \varepsilon d, & t V &= t' d, \\ \psi &= \psi' \varepsilon V d, & u &= u' V, & v &= v' \varepsilon V, \\ p^* &= p' \varrho V^2, & \gamma \varepsilon d &= \gamma' V. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

<sup>4</sup> In what follows, therefore,  $-p_{xx}$ ,  $-p_{yy}$ ,  $-p_{zz}$  denote the excess normal pressures, in different directions, above the hydrostatic pressure.



These non-dimensional quantities are, with the possible exception of  $p'$ , all of order unity. In terms of the reduced variables equations (20) and (21) become

$$\varepsilon^2 R_0 \left[ \frac{D}{Dt'} \left( -\frac{\partial \psi'}{\partial y'} \right) + \frac{\partial p'}{\partial x'} \right] = -\frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} \right) + \varepsilon^{-1} Q \left\{ 2 \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left( \gamma' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} \right) + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \gamma' \left( \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} \right) \right] \right\}, \quad (26)$$

$$\varepsilon^2 R_0 \left[ \varepsilon^2 \frac{D}{Dt'} \left( \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \right) + \frac{\partial p'}{\partial y'} \right] = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} \right) + \varepsilon Q \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \gamma' \left( \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} \right) \right] - 2 \frac{\partial}{\partial y'} \left( \gamma' \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} \right) \right\}, \quad (27)$$

where  $R_0$  and  $Q$  are the dimensionless parameters defined by

$$R_0 = \frac{\rho V d}{\eta_0}, \quad Q = \frac{\alpha V}{d}, \quad (28)$$

$$\gamma' = \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} \right)^2 + 4 \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (29)$$

and

$$\frac{D}{Dt'} \equiv \frac{\partial}{\partial t'} + u' \frac{\partial}{\partial x'} + v' \frac{\partial}{\partial y'}. \quad (30)$$

The orders of magnitude of the groups of terms in each of the equations (26) and (27) are (from left to right)  $\varepsilon^2 R_0$ , 1,  $\varepsilon^{-1} Q$  and  $\varepsilon Q$ . Interesting cases arise when two or three of these four quantities are of the same order of magnitude in part of the region of flow, while the remaining quantities are smaller. If  $\varepsilon^2 R_0$  is approximately unity and if both  $\varepsilon^{-1} Q$  and  $\varepsilon Q$  are small, we have a Prandtl boundary-layer for a fluid of constant viscosity  $\eta_0$ . In the fluids now under consideration the possibility arises of a region in which  $\varepsilon^2 R_0$  and  $\varepsilon^{-1} Q$  are approximately unity and  $\varepsilon Q$  is small; this may happen when  $R_0$  is large and  $Q$  is small so that  $Q R_0^{1/2}$  is of order unity. In such a region of flow (a boundary-layer) certain terms may be neglected in the equations of motion (20) and (21). We shall be concerned only with forward flow in the boundary-layer and therefore may take  $\partial^2 \psi / \partial y^2 < 0$  so that  $\gamma' = -\partial^2 \psi' / \partial y'^2$ , approximately. Neglecting terms of order  $\varepsilon^2$ , equations (20) and (21) become

$$\frac{D}{Dt} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} = -\nu_0 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \nu_0 \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} = 0, \quad (31)$$

where  $\nu_0 = \eta_0 / \rho$ . The normal stresses  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$  and  $p_{zz}$  can be written

$$p_{xx} = p_{yy} = -p^*, \quad p_{zz} = -p^* - \zeta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2. \quad (32)$$

The stress component  $p_{zz}$  is here a function of  $x$ ,  $y$  and  $t$ , whereas for Newtonian

fluids  $p_{zz}$  is a function of  $x$  and  $t$  only. The shear stress in the boundary-layer is

$$\tau = p_{xy} = -\eta_0 \left( 1 + \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad (33)$$

and the rate of dissipation of energy per unit volume in the boundary-layer is

$$\Phi = \eta_0 \left( 1 + \alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2. \quad (34)$$

The inequality (19) reduces to

$$\eta_0 \geq 0, \quad 1 + 2\alpha \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \geq 0 \quad (\text{all } x, y, t). \quad (35)$$

In most parts of the fluid the viscous stresses are negligible, and just outside the boundary-layer the flow is that of an inviscid fluid defined by a mainstream velocity  $u_1(x, t)$  and a pressure (excess above the hydrostatic)  $p_1(x, t)$ . The continuity of  $p_{yy}$  at the outer edge of the boundary-layer requires that  $p^*(x, t) = p_1(x, t)$ , and, in the case of steady motion, the equation determining  $\psi$  becomes

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = u_1 \frac{du_1}{dx} - \nu_0 \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \nu_0 \alpha \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2. \quad (36)$$

The boundary conditions under which equation (36) is to be integrated are the same as in PRANDTL's theory.

A search for solutions of equation (36) in which the velocity profiles are similar in different sections reveals that the only possible forms of  $u_1(x)$  and  $\delta(x)$  (the boundary-layer thickness) under these conditions are

$$u_1 \propto x^{1/3}, \quad \delta \propto x^{1/3}, \quad (37)$$

where  $x$  measures distance along a rigid boundary from a stagnation point<sup>5)</sup>. Taking the mainstream velocity as  $k x^{1/3}$  ( $k > 0$ ) it is convenient to write

$$\psi = - \left( \frac{3k\nu_0}{2} \right)^{1/2} x^{2/3} F(\xi), \quad \xi = \left( \frac{2k}{3\nu_0} \right)^{1/2} x^{-1/3} y, \quad (38)$$

so that equation (36) reduces to

$$F'''(\xi) + F(\xi) F''(\xi) - K F''(\xi) F'''(\xi) = \frac{1}{2} [F'^2(\xi) - 1], \quad (39)$$

where a prime denotes differentiation of a function of a single independent variable and the dimensionless parameter  $K$  (which is proportional to the dimensionless quantity  $QR^{1/2}$  and is, therefore, of order unity in the boundary-

<sup>5)</sup> Cf. GOLDSTEIN'S [6] method of finding similar solutions of the Newtonian boundary-layer equations. When  $Q = 0$  an infinite number of similar solutions exists, defined by  $u_1 \propto x^m$ ,  $\delta \propto x^{-1/2(m-1)}$ .

layer<sup>6)</sup> is defined by

$$K = \left( \frac{8 k^3}{3 \nu_0} \right)^{1/2} \alpha. \quad (40)$$

Equation (39) is now to be integrated with the boundary conditions

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 0, \quad F'(\infty) = 1. \quad (41)$$

We shall work out the details of this particular case in §§ 4, 5.

#### 4. Approximate Solutions Based on the Momentum Integral

Integrating equation (36) across the boundary-layer we arrive at the momentum equation, namely

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left( u_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} dy - \frac{du_1}{dx} \int_0^\delta \left( u_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy \\ = \nu_0 \left[ 1 + \alpha \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{y=0} \right] \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_{y=0}. \end{aligned} \quad (42)$$

If, as in PRANDTL'S theory, we define a displacement thickness  $\delta_1(x)$  and a momentum thickness  $\delta_2(x)$  by

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{u_1} \right) dy, \quad \delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_1} \left( 1 - \frac{u}{u_1} \right) dy, \quad (43)$$

and express (42) in terms of  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  and  $\tau_0$  (the shear stress at the wall), we are able to reduce the momentum equation to the same form as for a Newtonian fluid:

$$u_1 \frac{d u_1}{d x} (\delta_1 + 2 \delta_2) + u_1^2 \frac{d \delta_2}{d x} = \frac{\tau_0}{\rho}. \quad (44)$$

We now take  $u$  to be approximately a polynomial of the fourth degree in the dimensionless variable  $X = y/\delta$  whose coefficients are functions of  $x$  only:

$$u = u_1 (f_1 X + f_2 X^2 + f_3 X^3 + f_4 X^4). \quad (45)$$

Using the same boundary conditions as in POHLHAUSEN'S [7] approximate treatment in the case of Newtonian flow we find that

$$f_1 = 2 + \frac{1}{6} \lambda, \quad f_2 = -\frac{1}{2} \lambda, \quad f_3 = -2 + \frac{1}{2} \lambda, \quad f_4 = 1 - \frac{1}{6} \lambda, \quad (46)$$

where

$$\frac{\alpha u_1}{3 \delta} \lambda^2 - \left( 1 - \frac{4 \alpha u_1}{\delta} \right) \lambda + \frac{\delta^2}{\nu_0} \frac{d u_1}{d x} = 0. \quad (47)$$

<sup>6)</sup> It is appropriate to take  $R_0 = k x^{4/3}/\nu_0$  and  $Q = \alpha k/x^{2/3}$  in this problem. Near the stagnation point ( $x = 0$ ) the boundary-layer theory ceases to be applicable (as in the case of PRANDTL) since the assumptions that  $R_0$  is large and  $Q$  is small are not satisfied.

(The equations familiar in POHLHAUSEN'S treatment of the ordinary boundary-layer are obtained by putting  $\alpha = 0$ .) Hence we obtain for the velocity profile

$$u = u_1[H(X) + \lambda G(X)], \quad (48)$$

where

$$H(X) = 2X - 2X^3 + X^4, \quad G(X) = \frac{1}{6}X(1 - X)^3. \quad (49)$$

The forms of  $H(X)$  and  $G(X)$  are exactly as for Newtonian fluids and have been exhibited graphically (see, for example, GOLDSTEIN [8]), but here  $\lambda$  depends on both the dimensionless parameters  $R_0$  and  $Q$ .

The boundary-layer thickness must be of the form

$$\delta = \beta \left( \frac{3\nu_0}{2k} \right)^{1/2} x^{1/3}, \quad (50)$$

where  $\beta$  is a constant; the parameter  $\lambda$  then has a constant value throughout the boundary-layer and equation (47) reduces to

$$3\beta^3 - 6\lambda\beta + K\lambda(\lambda + 12) = 0. \quad (51)$$

On the basis of this approximate analysis, the displacement thickness and the momentum thickness are given by

$$\delta_1 = \beta_1 \left( \frac{3\nu_0}{2k} \right)^{1/2} x^{1/3}, \quad \delta_2 = \beta_2 \left( \frac{3\nu_0}{2k} \right)^{1/2} x^{1/3}, \quad (52)$$

where

$$\beta_1 = \frac{\beta}{120} (36 - \lambda), \quad \beta_2 = \frac{\beta}{315} \left( 37 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{5}{144}\lambda^2 \right), \quad (53)$$

equations already familiar (with a different meaning of  $\lambda$ ) for Newtonian flow. The values of  $\beta_1$  and  $\beta_2$  are easily found when  $\lambda$  and  $\beta$  are known.

Equation (44) now reduces to

$$\left( 548 - \frac{29}{3}\lambda - \frac{5}{18}\lambda^2 \right) \beta^3 - 280(12 + \lambda)\beta + \frac{70}{3}K(12 + \lambda)^2 = 0, \quad (54)$$

and equations (51) and (54) may be solved numerically for a given value of the parameter  $K$ . The values of  $\lambda$ ,  $\beta$ ,  $\beta_1$  and  $\beta_2$  for various values of  $K$  are included in Table I. In order to avoid ambiguity in the values of  $\lambda$  (i. e. of  $\beta$ ) we must consider only the range  $1.83 < \lambda < 12$ , and then the results derived by the above approximate method are unique. It follows that we must certainly have  $K < 0.41$ . The restriction (35) implies

$$1 - \frac{K}{\beta} \left( 2 + \frac{\lambda}{6} \right) \geq 0$$

and is consistent with the range of values of  $K < 0.41$ .

Table I

$K$	$\lambda$	$\beta$	$\beta_1$	$\beta_2$	$(3 \, k^2/8 \, \nu_0)^{1/2} \, x^{2/3} \, C_f$
0.4	10.50	3.44	0.731	0.324	0.854
0.3	6.89	3.09	0.740	0.325	0.862
0.1	5.14	3.05	0.785	0.333	0.892
0	4.72	3.07	0.801	0.338	0.907
-0.2	4.17	3.13	0.829	0.347	0.936
-0.4	3.83	3.19	0.856	0.357	0.963
-0.6	3.59	3.26	0.880	0.366	0.988
-0.8	3.41	3.32	0.902	0.374	1.012
-1.0	3.27	3.39	0.923	0.382	1.035
-1.2	3.16	3.45	0.943	0.389	1.056
-1.4	3.07	3.50	0.962	0.397	1.076

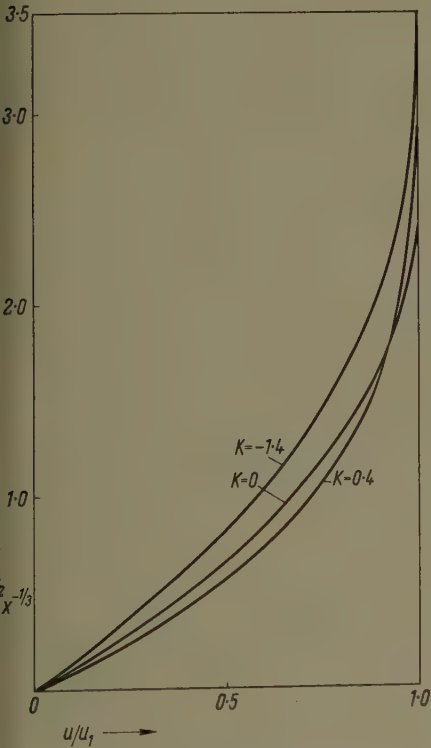


Figure 1

Showing how the velocity profile across the boundary-layer varies with the parameter  $K$ .

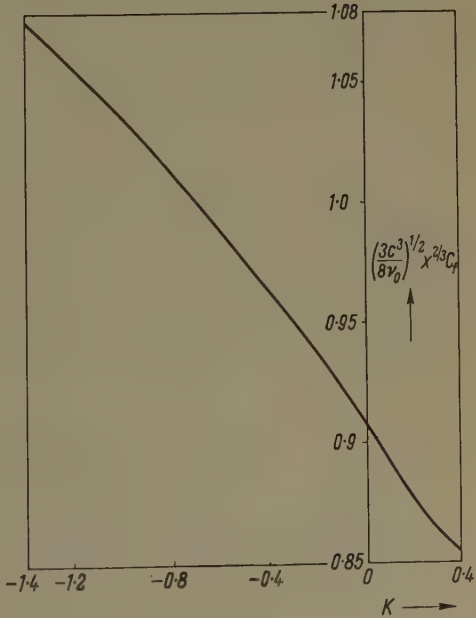


Figure 2

Showing how the coefficient of friction varies with the parameter  $K$ .



The velocity profile across the boundary-layer corresponding to each of the values  $K = 0.4$ ,  $K = 0$  and  $K = -1.4$  is shown in Figure 1. Comparing the columns of Table I it is seen that the displacement thickness (proportional to  $\beta_1$ ) and the momentum thickness (proportional to  $\beta_2$ ) both decrease as  $K$  increases over the whole range of values of  $K$  considered. (The values of  $\beta$ , which has a less direct physical significance, do not reflect the trend in boundary-layer thickness so well.)

The skin-friction coefficient  $C_f$  is given by

$$C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2} \rho u_1^2} = \frac{1}{\beta} \left( 2 + \frac{\lambda}{6} \right) \left[ 1 - \frac{K}{2\beta} \left( 2 + \frac{\lambda}{6} \right) \right] \left( \frac{8\nu_0}{3k^3} \right)^{1/2} x^{-2/3}, \quad (56)$$

and the values of  $(3k^3/8\nu_0)^{1/2} x^{2/3} C_f$  for corresponding values of  $K$  are included in Table I and are exhibited graphically in Figure 2. It is seen that as  $K$  decreases from 0.4 to  $-1.4$  the quantity  $(3k^3/8\nu_0)^{1/2} x^{2/3} C_f$  increases almost linearly with  $K$ .

The normal stress  $p_{zz}$  is given by

$$p_{zz} + p_1 = -\frac{\zeta k^3}{18\nu_0\beta^4} [(\lambda + 12) - 6\lambda X + 9(\lambda - 4)X^2 - 4(\lambda - 6)X^3]^2, \quad (57)$$

where  $X$  varies from 0 to 1 across the boundary-layer. At the outer edge of the boundary-layer ( $X = 1$ ) we have

$$(p_{zz} + p_1)_{y=\delta} = 0. \quad (58)$$

At the wall ( $X = 0$ ) we have

$$(p_{zz} + p_1)_{y=0} = -\frac{\zeta k^3}{18\nu_0\beta^4} (\lambda + 12)^2. \quad (59)$$

Therefore normal stresses perpendicular to the plane of flow are required in the boundary-layer region near a rigid boundary in order to maintain a two-dimensional motion, the sign of these stresses depending on the sign of  $\zeta$ . The magnitude of  $(p_{zz} + p_1)_{y=0}$  depends on the parameter  $K$ ;  $(p_{zz} + p_1)_{y=0}$  increases with  $K$  and the value at  $K = 0.4$  is roughly 2.4 times that at  $K = -1.4$ .

## 5. A Method of Evaluating the Parameter $F''(0)$

The accuracy of the modified Pohlhausen method of § 4 can be checked by comparing the results with those obtained by a more direct method of integrating the non-Newtonian boundary-layer equations. A method recently used by MEKSYN [9] in solving the boundary-layer equations for Newtonian flow can be extended for this purpose. It is assumed, in the range of values of the parameter  $K$  under consideration, that the boundary conditions (41) determine  $F(\xi)$  without ambiguity and that the value of  $F''(0)$  is a continuous function of

K. The inequality (35) may be written as

$$1 - K F''(0) \geq 0 \quad (60)$$

and there appears to be no other restriction on the magnitude of  $K$ .

It may be shown, by inspection of (39) and (41), that we must seek a solution of the form

$$F''(\xi) = M(\xi) e^{-N(\xi)}, \quad (61)$$

where the positive function  $N(\xi)$  is given by

$$N(\xi) = \int_0^\xi F(\xi_1) d\xi_1, \quad (62)$$

and  $M(\xi)$  is a slowly varying function; a solution of this type, satisfying the boundary conditions at  $\xi = 0$ , ensures the correct form of the function at  $\xi = \infty$ . We observe that the function  $F''(\xi)$ , as defined by (61), is of precisely the same form as for Newtonian flow ( $K = 0$ ), except that here the functions  $M(\xi)$  and  $N(\xi)$  depend on the parameter  $K$ . Hence the steps of MEKSYN's analysis may be followed closely in the non-Newtonian case also, and the reader is referred to MEKSYN [9] for fuller explanations. In the notation of MEKSYN we write for the functions  $F(\xi)$ ,  $M(\xi)$  and  $N(\xi)$  the power series

$$F(\xi) = \xi^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \xi^n}{(n+2)!}, \quad M(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n, \quad N(\xi) = \xi^3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n, \quad (63)$$

with constant coefficients  $a_n$ ,  $b_n$  and  $c_n$ .

We require to find the value of the parameter  $F''(0)$  that permits the boundary conditions at infinity to be satisfied; and we can use the condition

$$F'(\infty) = \int_0^\infty M(\xi) e^{-N(\xi)} d\xi = 1. \quad (64)$$

To evaluate (64) we put

$$\sigma = N(\xi), \quad (65)$$

which implies

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sigma^{n/3}, \quad (66)$$

where

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[ \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \dots)^{-n/3} \right]_{\xi=0}. \quad (67)$$

It may be shown that (64) reduces (in terms of gamma functions) to

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) x^{n+1} = 1, \quad (68)$$

where

$$\bar{d}_n = \frac{1}{3n!} \left\{ \frac{\bar{d}^n}{\bar{d}\xi^n} [(b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + \dots) \times (c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + \dots)^{-(n+1)/3}] \right\}_{\xi=0}. \quad (69)$$

The coefficients  $A_n$  and  $\bar{d}_n$ , expressed in terms of the parameters  $F''(0)$  and  $K$ , are

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 0, \quad A_1 = \left(\frac{6}{a}\right)^{1/3}, \quad A_2 = \frac{a^{-2} L}{4} \left(\frac{a}{6}\right)^{1/3}, \\ A_3 &= \frac{a^{-3} L^2}{160} (9 - 4L), \\ A_4 &= \frac{a^{-5} L^3}{5760} \left(\frac{a}{6}\right)^{2/3} (216 L^2 - 684 L + 643), \\ A_5 &= \left(\frac{a}{6}\right)^{1/3} \left( -\frac{a^{-2} L^2}{140} + \frac{77 a^{-6} L^4}{13824} - \frac{11 a^{-5} K L^5}{960} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 a^{-4} K^2 L^6}{200} - \frac{3 a^{-3} K^3 L^7}{2240} \right), \\ A_6 &= -\frac{a^{-3} L^3}{448} + \frac{a^{-2} K L^4}{280} + \frac{9 a^{-7} L^5}{8192} - \frac{3 a^{-6} K L^6}{1024} \\ &\quad + \frac{63 a^{-5} K^2 L^7}{12800} - \frac{9 a^{-4} K^3 L^8}{1400} + \frac{3 a^{-3} K^4 L^9}{512}, \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{d}_0 &= \frac{1}{3} (6 a^2)^{1/3}, \quad \bar{d}_1 = -\frac{5}{36} L \left(\frac{6}{a}\right)^{2/3}, \\ \bar{d}_2 &= \frac{3 a^{-2} L^2}{160} (12 L - 17), \\ \bar{d}_3 &= \left(\frac{6}{a}\right)^{1/3} \left( \frac{a}{3} - \frac{91 a^{-3} L^3}{5184} + \frac{7 a^{-2} K L^4}{144} - \frac{7 a^{-1} K^2 L^5}{60} \right), \\ \bar{d}_4 &= \left(\frac{6}{a}\right)^{2/3} \left( -\frac{5 L}{36} + \frac{5 L^2}{126} - \frac{935 a^{-4} L^4}{248832} + \frac{43 a^{-3} K L^5}{3456} \right. \\ &\quad \left. - \frac{93 a^{-2} K^2 L^6}{2880} + \frac{25 a^{-1} K^3 L^7}{366} \right), \end{aligned} \right\} \quad (71)^7$$

<sup>7)</sup> MEKSYN's results for the constants  $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$  and  $\bar{d}_5$ , in the special case when two of his parameters ( $\alpha$  and  $\lambda'$ ) vanish, can be obtained from the above expressions by putting  $K = 0, L = 1$ . The corresponding results for the constants  $\bar{d}_0, \bar{d}_4$  and  $\bar{d}_6$ , obtained by putting  $K = 0, L = 1$  in (71), are

$$\begin{aligned} \bar{d}_0 &= \frac{1}{3} (6 a^2)^{1/3}, \quad \bar{d}_1 = -\left(\frac{6}{a}\right)^{2/3} \left( \frac{25}{252} + \frac{935 a^{-4}}{248832} \right), \\ \bar{d}_3 &= \left(\frac{6}{a}\right)^{1/3} \left( \frac{a}{6} - \frac{169 a^{-3}}{20736} - \frac{43225 a^{-7}}{35831808} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d_5 = & -\frac{51 a^{-2} L^2}{160} + \frac{297 a^{-2} L^3}{1120} - \frac{27 a^{-1} K L^4}{140} - \frac{21 a^{-6} L^5}{4096} \\
 & + \frac{51 a^{-5} K L^6}{2560} - \frac{9 a^{-4} K^2 L^7}{160} + \frac{3267 a^{-3} K^3 L^8}{22400} - \frac{81 a^{-2} K^4 L^9}{256}, \\
 d_6 = & \left( \frac{6}{a} \right)^{1/3} \left( \frac{a}{6} - \frac{5117 a^{-3} L^3}{25920} + \frac{6541 a^{-3} L^4}{34560} - \frac{205 a^{-2} K L^5}{1152} \right. \\
 & + \frac{7 a^{-1} K^2 L^5}{480} - \frac{43225 a^{-7} L^6}{35831808} + \frac{21 a^{-1} K^2 L^6}{128} \\
 & + \frac{5369 a^{-6} K L^7}{995328} - \frac{13741 a^{-5} K^2 L^8}{829440} + \frac{8591 a^{-4} K^3 L^9}{172800} \\
 & \left. - \frac{3629 a^{-3} K^4 L^{10}}{30720} + \frac{245 a^{-2} K^5 L^{11}}{1024} \right), \quad (71)^7
 \end{aligned}$$

where

$$a = F''(0) \quad \text{and} \quad L = (1 - a K)^{-1}. \quad (72)$$

The following procedure is now adopted to complete the calculations. For a selected value of the dimensionless parameter  $K$  we assume a trial value for the parameter  $a$ . The series in (68) is, in all the cases considered, divergent as  $x$  tends to unity, and we must apply EULER'S transformation (see, for example, HARDY [10]) repeatedly until a convergent expression is obtained. An adjustment in the value of  $a$  can then be made, and the process repeated until (68) is satisfied. The results derived by the extended Pohlhausen method of § 4 are used to give a first approximation to  $a$ , and the calculations are continued with steps of  $a = 0.005$  until the result  $F'(\infty) = 1.00$  is obtained. The numerical calculations are heavy and, for the sake of shortness, only the final results are summarized here.

The constants  $\beta_1$  and  $\beta_2$  are

$$\beta_1 = \int_0^\infty [1 - F'(\xi)] d\xi, \quad \beta_2 = \int_0^\infty F'(\xi) [1 - F'(\xi)] d\xi. \quad (73)$$

Hence

$$\beta_1 = \int_0^\infty \xi M(\xi) e^{-N(\xi)} d\xi, \quad (74)$$

which follows on integration of the first equation of (73) by parts with the assumption of the property

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} F(\xi) [1 - F'(\xi)] = 0. \quad (75)$$

which differ from the expressions in MEKSYN'S equations (9.7) with the particular values  $\alpha = 0$ ,  $\lambda' = 0$ ,  $\lambda = -1/2$ . A simple misprint accounts for the discrepancy in the case of  $d_0$ , and the discrepancies in  $d_4$  and  $d_6$  are of no more than about 0.1 %, so that MEKSYN'S final results are not in question.

Applying the transformation (65) we obtain

$$\beta_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} e_n \Gamma\left(\frac{n+2}{3}\right) x^{n+1}, \quad (76)$$

where

$$e_n = A_1 d_n + A_2 d_{n-1} + \cdots + A_{n+1} d_0, \quad (77)$$

and to sum the expansion for  $x = 1$  we use EULER'S transformation.

To find the constant  $\beta_2$  use is made of the relation

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{1}{2} K F''(0)\right] F''(0) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [1 - F'(\xi)] d\xi + \frac{3}{2} \int_0^{\infty} F'(\xi) [1 - F'(\xi)] d\xi = \frac{1}{2} \beta_1 + \frac{3}{2} \beta_2 \end{aligned} \quad (78)$$

which follows on integration of equation (39) with respect to  $\xi$  with the assumption of the property (75).

The final results are exhibited in Table II.

Table II

$K$	$\beta_1$	$\beta_2$	$(3 k^3/8 \nu_0)^{1/2} x^{2/3} C_f$
0.4	0.74	0.31	0.85
0	0.80	0.35	0.93
-1.0	-0.90	0.42	1.08

## 6. Conclusion

The values of  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $(3 k^3/8 \nu_0)^{1/2} x^{2/3} C_f$  as found by the two above methods of solution agree fairly well and one is therefore led to regard with confidence the above results based on the adaptation of the momentum equation.

Although the quantitative results in §§ 4, 5 have been obtained for a particular type of non-Newtonian fluid (i. e. for a particular form of the viscosity  $\eta$ ) and for particular external conditions, we may expect them to be qualitatively valid much more generally. The variation of viscosity with rate of shear must be expected to decrease or increase the parameters  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  and  $C_f$  according as the viscosity decreases or increases with the rate of shear, and any normal-stress coefficient will not be expected to affect the velocity field.

I should like to thank Professor J. G. OLDROYD for most helpful discussions and suggestions throughout the progress of this work.



## REFERENCES

- [1] L. PRANDTL, Proc. Intern. Math. Kongr. III, 487 (1904).
- [2] J. G. OLDROYD, Proc. Roy. Soc. [A] 200, 523 (1950).
- [3] H. SCHLICHTING, *Boundary-Layer Theory* (Pergamon, 1955), Chap. XV.
- [4] R. S. RIVLIN, Proc. Roy. Soc. [A] 193, 260 (1948).
- [5] M. REINER, Amer. J. Math. 67, 350 (1945).
- [6] S. GOLDSTEIN, Proc. Cambridge Phil. Soc. 35, 338 (1939).
- [7] E. POHLHAUSEN, Z. Math. Mech. 1, 257 (1921).
- [8] S. GOLDSTEIN, *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Vol. 1 (Oxford 1938), p. 158, 159.
- [9] D. MEKSYN, Proc. Roy. Soc. (A) 237, 543 (1956).
- [10] G. H. HARDY, *Divergent Series* (Oxford, 1949).

## Résumé

Dans ce mémoire, on examine l'effet d'une variation de viscosité avec la vitesse de déformation dans une couche limite à deux dimensions. Pour des raisons mathématiques traitables, l'exemple que l'on étudie en détail est celui dans lequel le coefficient de viscosité est une fonction linéaire de la vitesse de déformation et la vélocité du courant principal est en proportion du tiers de la puissance de distance mesurée d'un point de stagnation. On peut noter que quelques-uns des résultats qui se trouvent ici sont qualitativement les mêmes que ceux qui se trouvent quand on tient compte de la compressibilité du fluide.

(Received: October 24, 1960.)

## Energy Flows in a Vortex Tube

By ALAN J. REYNOLDS, Cambridge, Great Britain<sup>1)</sup>

In a recent paper [1]<sup>2)</sup> the present writer considered the dynamics of the turbulent flow of a compressible fluid using an order-of-magnitude analysis. It is now proposed to extend this analysis to include energy fluxes in such vortex flows and, in particular, to give an explanation of the energy separation which is termed the Ranque effect.

## 1. The Ranque-Hilsch Vortex Tube

It will be remembered that the Ranque-Hilsch vortex tube is a device which is capable, although without moving parts, of dividing a homogeneous inflow of gas into a cooled stream and a heated stream (reference being in each case

<sup>1)</sup> Cavendish Laboratory.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 356.

to total temperature). The usual form of the device is as follows. The chief component is a tube of constant circular cross-section, its length several times its diameter. Near one end the tube wall is pierced to allow the entry of fluid (usually air), the inlet ports being so disposed that a swirling flow is set up within the tube. The fluid escapes at the ends of the vortex chamber, some through an orifice plate near the inlet, the rest through a second throttling device at the other end. Under certain operating conditions (notably, for reasonably high supply pressures and flow speeds) it is observed that the air emerging through the orifice near the inlet has a lowered total temperature and that the air leaving at the other exit has a higher temperature than the air supplied; temperature differences equivalent to several times the maximum dynamic head can be obtained.

The device and the effect it produces are associated with the names of two men: RANQUE, the French engineer who first fashioned it in 1931, and HILSCH, the German physicist who first studied its performance in detail and applied it to the liquefaction of gases in 1944. Very many other investigations of the device have been made since their early work. WESTLEY [2] has given a bibliography of work before 1952. Since then further performance data have been published by OTTEN, SPRENGER, and WESTLEY; results of internal flow measurements by HARTNETT and ECKERT, LAY, SCHELLER and BROWN; and theoretical treatments by DEISSLER and PERLMUTTER, HINZE, LAY, PENGELLEY, and ROTT ([3] to [12]). Several other studies have been made in this period, but they are less important or less easily accessible.

## 2. Qualitative Theories of the Ranque Effect

Early discussions of the energy separation within the vortex tube considered inviscid, non-conducting fluids: the first theory put forward by RANQUE was of this type. However, it soon became apparent that transport properties must be considered. A later theory of RANQUE, supported also by HILSCH, was that the outwards migration of energy was due to radial work transfer. They pictured a 'free' vortex being converted by viscous shearing forces into a 'forced' vortex and a consequent outwards transfer of kinetic energy. FULTON [13] carried forward these ideas of vortex conversion by noting that inwards conduction of heat would counteract the outwards work flux. He found that a net outwards flux occurred in laminar flow but estimated that it was not of sufficient magnitude to produce the observed energy separation.

It thus appeared that turbulent mixing was a more likely agent of energy transfer. This conclusion still seems valid today: it is supported by the recent calculations of DEISSLER and PERLMUTTER [9].

At first the role of turbulence was thought to be qualitatively the same as that of molecular transport, although giving rise to very much greater energy

fluxes. The first discussion in which a contrary view was taken is that of KNOERNSCHILD [14]. He pointed out that a compressible fluid lump moving rapidly through a pressure gradient must experience temperature variations on expanding or contracting. Thus the temperature distribution will move towards that related to the pressure gradient by an adiabatic law. At present, KNOERNSCHILD's concept is the most widely favoured explanation of the Ranque effect, although a work flux contribution is also thought to be important by some workers.

The ideas just discussed form the main stream of thought concerning the Ranque effect. But several suggestions have been made which do not fit into this evolutionary pattern. The most challenging is that put forward by SPRENGER [4], but seemingly due originally to ACKERET, that organized unsteadiness (as distinct from turbulence) might produce the energy separation. This hypothesis is based on analogy with resonance tube phenomena. The present writer has already put forward his reasons for feeling that this mechanism offers a less satisfactory explanation of the Ranque effect [15].

Summarizing: it seems probable that the energy separation of the vortex tube is the result of turbulent activity within the vortex chamber. Our task is to discover what are the mechanisms of turbulence by which the energy fluxes are set up.

3. The Energy Equation

If we neglect molecular transport properties and body forces, the energy equation can be written

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varrho h_0) + \nabla \cdot (\varrho h_0 \mathbf{u}) = \frac{\partial p}{\partial t},$$

where  $h_0 = h + \mathbf{u}^2/2$  is the total enthalpy of the fluid, the sum of the enthalpy and the kinetic energy per unit mass. Taking mean values with respect to time and requiring that the mean motion be steady, we have

$$\nabla \cdot (\overline{\varrho h_0 \mathbf{u}}) = 0$$

which gives

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \overline{\varrho u h_0}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{\varrho w h_0}) = 0$$

for axisymmetric mean flow. We have

$$\overline{\varrho u h_0} = (R + \varrho') (U + u') (\overline{H_0 + h'_0})$$

and

$$H_0 = H + \frac{1}{2} [U^2 + V^2 + W^2 + \overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}],$$

$$h'_0 = h' + u' U + v' V + w' W.$$

#### 4. Order-of-Magnitude Analysis

We shall specialize the energy equation given above by introducing a system of approximation suitable for vortex tube flows. The scheme to be used is that set forth in Section 3 of the previous paper on the dynamics of vortex flows:

$$V \sim O(1), \quad U \sim O(\varepsilon); \quad \frac{\partial}{\partial r} \sim O(1), \quad \frac{\partial}{\partial z} \sim O(\delta).$$

As before, we specify the turbulence by

$$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2} \sim O(\beta), \quad \varrho' \sim O(\eta),$$

adding here  $h' \sim O(\alpha)$ .

We choose units such that  $r, V \sim O(1)$ , knowing from the previous analysis that  $R \sim O(1)$  for consistency. We take also  $\Delta H_0 \sim O(1)$ , knowing that energy separations are typically a few times the dynamic head. This assumption will be seen to be consistent with the others a posteriori. It will be assumed, of course, that  $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \eta$  are all small compared to unity so that terms of higher orders in them can be neglected.

Introducing these approximations into the appropriate form of the continuity equation, we find that

$$W \sim O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right),$$

at most, so that

$$\underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R U)}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} (R W)}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \varrho' \overline{\mu'})}_{O(\beta^{1/2} \eta)} = O(\beta^{1/2} \delta \eta)$$

is the approximate continuity relation for this case.

Similarly, the approximate energy equation is found to be

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R U H_0)}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} (R W H_0)}_{O(\varepsilon)} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_0 \overline{\varrho' u'})}_{O(\beta^{1/2} \eta)} \\ & + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R \overline{u' h'})}_{O(\alpha \beta^{1/2})} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R V \overline{u' v'})}_{O(\beta)} + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R W \overline{u' w'})}_{O(\beta \varepsilon / \delta)} \\ & = O(\beta \delta, \beta \varepsilon, \alpha \beta^{1/2} \delta). \end{aligned}$$

Only the leading error terms have been indicated.

This result relates the several important energy fluxes into an elemental volume. It can be cast into another form without altering the orders of the

errors if we use the continuity equation given above. Thus

$$R \frac{DH_0}{Dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R \overline{u' h'}) - \overline{\varrho' u'} \frac{\partial H_0}{\partial r} \\ - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V \overline{u' v'}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r W \overline{u' w'})$$

where  $D/Dt$  indicates the rate-of-change following the mean motion. Here we have a relation among the radial energy fluxes and the energy input to a lump of fluid moving through the system.

### 5. The Important Energy Fluxes

The simplified forms of the energy equation suggest that the significant energy movements within the vortex are due to four energy fluxes:

a) The heat flux  $R \overline{u' h'}$  is produced by turbulent mixing through the radial temperature and pressure gradients. This is the contribution whose full significance was pointed out by KNOERNSCHILD.

b) The flux of total energy  $\overline{\varrho' u'} H_0$  is associated with the 'Archimedean' correlation which was discussed briefly in connection with vortex dynamics.

c) The work fluxes  $R V \overline{u' v'}$  and  $R W \overline{u' w'}$  associated with the two important Reynolds stresses, those acting on cylindrical surfaces.

A rough estimate of the relative magnitudes of these contributions can be made using data from extensive tests on vortex tubes. These data were used in a similar manner in the previous analysis of flow dynamics [1]. The vortex tube within which the flow was investigated was about 7.5 cm in diameter and about 120 cm long. Total and static pressure and temperature traverses were made at several stations down the tube with various blockages at the ends. In [1] it is found that the results suggest that we may represent a typical internal flow by taking

$$\delta \sim \frac{1}{50}, \quad \varepsilon \sim \frac{1}{200}, \quad \beta \sim \frac{1}{100}, \quad \eta \sim \frac{1}{100}.$$

Thus we estimate the terms of the energy equation obtained above as

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R U H_0)_{O(1/200)} + \frac{\partial}{\partial z} (R W H_0)_{O(1/200)} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_0 \overline{\varrho' u'})_{O(1/1000)} \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R \overline{u' h'})_{O(\alpha/10)} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R V \overline{u' v'})_{O(1/100)} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R W \overline{u' w'})_{O(1/400)} \\ = O\left(\frac{1}{5000}, \frac{\alpha}{500}\right).$$



We note that the Archimedean effect seems to be somewhat less important than the other contributions. The work fluxes appear to be of the same order as the heating/cooling effects (the first two terms). There is no reason to suppose that the energy flux due to the Knoernschild effect is more important than that produced by the radial work fluxes. The quantity  $\alpha$  will have to be  $\sim 1/20$  if the thermal convection term is to equal the work flux in importance.

We next consider the physical processes corresponding to these important terms of the energy equation. In this way it will be possible to obtain a better idea of the relative importance of the several contributions to the radial energy flow. We adopt now the so-called Lagrangian point of view and attempt to build up idealized models of the internal motions of the turbulent fluid in order to see how the energy flows are influenced by mean-value gradients in the vortex.

## 6. The Knoernschild Effect

KNOERNSCHILD observed [14] that it is not correct to think of the turbulent mixing of a compressible fluid across a pressure gradient in terms of the simple model used for an incompressible fluid – a fluid lump shifted unchanged to a new position and there mixing with the ambient fluid. A lump of compressible fluid will not be transported through a pressure gradient with all its properties unchanged and without interactions with the fluid through which it moves. A work interaction with the surroundings will occur during such a movement, the particle being compressed on moving radially outwards to a region of higher pressure or expanding on moving inwards. Thus the work interaction with the matrix of fluid through which mixing takes place results in the cooling of the inwards-moving particles and heating of those moving outwards.

It has generally been assumed that the convecting particles do not interact with their surroundings except by expanding and contracting. That is, it is held that they are very nearly adiabatic while in motion. DEISSLER and PERLMUTTER [9] mention work supporting this idea. In any case, the utility of the theory does not depend on strictly adiabatic lump movements. The most recent derivation of the expression for  $\overline{u' h'}$  in terms of mean-flow gradients, that of HINZE [10], takes account of non-adiabatic lump motions<sup>3)</sup>.

Assuming the mixing fluid to be a perfect gas, HINZE gets a result equivalent to

$$\overline{u' h'} = -\varepsilon_H \left( \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{H}{P} \frac{\partial P}{\partial r} \right).$$

<sup>3)</sup> It should be noted that we are able in this way to take account of the effect of molecular transport properties on the small-scale motions of the turbulence, even though viscosity and thermal conductivity were neglected in the mean-value equations with which the analysis was begun.

For this case we have simply  $H = c_p T$ , where  $T$  is the absolute temperature. Here  $\varepsilon_H$  is a positive coefficient expressing the activity of the turbulence – an eddy-diffusion coefficient. This result shows clearly the tendency of the radial distribution to move towards that defined by an adiabatic law applied to the pressure distribution.

Using the radial equilibrium condition:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = R \frac{V^2}{r} + O(\beta)$$

an alternative form can be given.

$$\overline{u' h'} = -\varepsilon_H \left( \frac{\partial H}{\partial r} - \frac{V^2}{r} \right).$$

The simple dependence of the radial flux on the local centripetal acceleration is thus made clear. This result is valid only for a perfect gas, even though the nature of the fluid does not enter explicitly.

When the radial temperature gradient is less steep than that defined by the adiabatic law (as was the case in the vortex tube flows investigated) the heat flux due to this effect is everywhere outwards. The influence of this term may be expected to be strongest in the core of the vortex where centripetal accelerations are highest.

### 7. Archimedean Effects

So far the influence of the heat flux,  $R \overline{u' h'}$ , on the overall energy transfer has appeared straightforward. But YUDINE, in the discussion of HINZE's paper on energy transfer in the atmosphere [10], pointed out that his treatment is not quite complete. In addition to the vertical transfer due to non-selective mixing by turbulent stirring (that considered by HINZE), there exists in the atmosphere an upwards heat flux set up by Archimedean forces. A counterpart of this phenomenon must be expected in vortex flows. A buoyancy effect ( $\overline{\rho' u'}$ ) did emerge in the simplified energy equation for vortex flow. But this term does not wholly account for the effects of Archimedean forces. This can be seen as follows. It is apparent that a particle lighter than its surroundings will tend inwards under the action of buoyancy forces. But a deficiency in density can be thought of as resulting either from a lower than ambient pressure or from a higher than ambient temperature. The first of these would seem to contribute primarily to the energy flux associated with the Archimedean correlation function,  $\overline{\rho' u'}$ : its discussion will be deferred. The second possibility, low density corresponding to a temperature above ambient, is of immediate interest, for it contributes directly to the correlation function  $\overline{u' h'}$  (as well as to  $\overline{\rho' u'}$ ).

The general effect of this contribution to the heat flux in a vortex is not hard to see. Warmer lumps will tend inwards so that an additional heat flux is set up, one which exists even if the mean-value temperature distribution is adiabatically related to the pressure distribution and which is inwards in all circumstances. The estimation of this buoyancy contribution in comparison with that suggested by KNOERNSCHILD and studied by HINZE and others is not easy. We shall not study this difficult problem in detail here: PRIESTLEY and SWINBANK [16] have discussed the analogous atmospheric case. But it is impossible to leave this matter without reaching some decision, however arbitrary. We shall then assume that this Archimedean heat transfer is masked by the Knoernschild effect so that the heat flux associated with the correlation function  $u' h'$  is outwards almost everywhere in the vortex. Support for this assumption is given by the following considerations. First, the Archimedean contribution to the heat flux can be of decisive importance only when the temperature distribution is near that prescribed by the adiabatic law applied to the pressure distribution. And, in the vortex tube flows studied, this was seldom the case. Second, it seems evident on considering the temperature distributions found in the Ranque-Hilsch tube that the outwards fluxes near the core do, in fact, overpower this additional, opposed heat flow. Lastly, the effect is of secondary importance in the analogous atmospheric situation.

We have tried to separate out three influences of compressibility on energy transfer in a vortex flow – the Knoernschild and two Archimedean effects. The separation is a somewhat arbitrary one: each of the effects must in reality interact with the others. This approach does display some of the possible phenomena even if it does not clearly define the relative importance of the contributions.

We now turn to the buoyancy effect which did emerge explicitly from the energy equation. As this contribution has not been dealt with previously, it will be given fairly detailed consideration here. Later an attempt will be made to relate the Archimedean correlation function,  $\overline{\rho' u'}$ , to the mean-flow gradients. For simplicity, we restrict consideration at that point to density perturbations induced by non-uniform pressures in the turbulent field. The methods used can be applied to other models.

As was pointed out in the discussion of flow dynamics, the correlation function  $\overline{\rho' u'}$  may be expected to be positive in a vortex in a compressible fluid: lighter lumps of fluid will tend inwards under the action of buoyancy forces. Then the associated energy flux,  $\overline{\rho' u' H_0}$ , will be everywhere radially outwards. Surprisingly, the overall effect of this outwards flux, as indicated by the term  $-\overline{\rho' u' \partial H_0 / \partial r}$ , seems to be to cool the fluid throughout the tube (since, except very near the tube wall,  $\partial H_0 / \partial r > 0$  in almost all of the situations investigated.)

This conundrum can be resolved as follows: the overall effect of the energy flux is to redistribute energy in the various *regions* of the tube; but, when continuity requirements are taken into account, this results in a reduction in the energy per unit mass of the whole of the *moving fluid*. Consider a simple example: purely radial flow. Continuity is

$$\frac{\partial}{\partial r}(r \bar{\rho} u) = 0;$$

whence, for zero net source flow, we get

$$R U = -\bar{\rho}' u'.$$

We shall take  $\bar{\rho}' u'$  to be positive. Then the requirement of continuity is an inwards mean velocity,  $U = -\bar{\rho}' u' / R$ . The energy equation derived from continuity is

$$R U \frac{\partial H_0}{\partial r} = R \frac{\partial H_0}{\partial t} = -\bar{\rho}' u' \frac{\partial H_0}{\partial r}.$$

Thus we see that the rate-of-change following the mean motion is, in fact, the rate-of-change as the fluid moves inwards in the direction opposite to the energy flux.

We shall next attempt to relate the correlation function  $\bar{\rho}' u'$  to the mean flow as has already been done for the function  $\bar{u}' h'$ . Let us clarify the situation by relating the turbulent velocity fluctuation at a point to the perturbation velocity of a lump at that point. We write  $u' = u'_1 + u'_2$  where  $u'$  is the deviation from the time-mean value at a point;  $u'_1$  is the velocity of the coincident particle due to the Archimedean buoyancy force per unit volume,  $\rho' V^2/r$ ; and  $u'_2$  is the part of the local motion induced by the surrounding turbulence. The term  $u'_1$  is random with respect to the fixed point but not so far as the passing eddy is concerned. Then  $\bar{\rho}' u' = \bar{\rho}' u'_1$ .

Our next task is to relate the velocity  $u'_1$  to the buoyancy force producing it. It seems plausible to compare the inwards-moving lighter lumps to microscopic particles whose net drift through a gas is superposed upon Brownian motion. In the present case, the turbulence of the fluid supplies the random disturbance to the drift due to the Archimedean force. In his theory of Brownian motion EINSTEIN [17] has assumed that the drift speed is linearly related to the force on a particle, in fact, that the drift motion obeys STOKES' law. The results of his theory have been verified experimentally. Similarly in electricity: a linear resistance law – OHM's law – is found to apply when the electrons' drift speed is small compared to the speed characterizing the random thermal motion.

By analogy with STOKES' law we relate a typical density fluctuation and a typical drift speed by

$$\rho' \frac{V^2}{r} \propto R \epsilon_M u'_1$$



where  $R \varepsilon_M$  replaces the molecular viscosity,  $\varepsilon_M$  being the eddy viscosity. The constant of proportionality is dependent on the scale of the turbulence.

Introducing once again (as in [1]) the hypothesis that density fluctuations at a point are the result of the convection past that point of eddies in which density gradients are maintained by pressure gradients holding the eddies together, we obtain

$$p' \propto R \overline{u'^2}; \quad \frac{\rho'}{p'} \simeq K;$$

where  $K$  is the compressibility of the fluid. Then

$$\overline{\rho' u'} = \varepsilon_A R K^2 \frac{V^2}{r},$$

where  $\varepsilon_A$  is a positive coefficient dependent on the kinematic aspects of the turbulence.

Alternatively, introducing the radial equilibrium condition, we get

$$\overline{\rho' u'} = \varepsilon_A K^2 \frac{\partial P}{\partial r}$$

for the Archimedean correlation function.

## 8. Work Flux due to Tangential Stresses

To investigate the work fluxes we need not consider the details of the turbulent motion. The previous investigation of the dynamics of vortex tube flows provides the means for the study of the work transfers. It was found that tangential momentum conservation could be represented with reasonable accuracy by

$$R U \left( \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} \right) + R W \frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R \overline{u' v'}).$$

In its present form this result does not easily yield information about the stress  $R \overline{u' v'}$  which gives rise to the work flux of interest here. An obvious simplification is the restriction to swirl distributions independent of axial position. Fortunately, this idealization has close counterparts in the vortex flows studied experimentally; and in particular it applies to the configurations for which the Ranque effect was especially large. The conclusions reached for this class will thus have some bearing on the problem of present interest. Subject to this restriction we have

$$(r R U) \frac{\partial}{\partial r} (r V) = - \frac{\partial}{\partial r} (r^2 R \overline{u' v'}).$$

We shall study this relationship by considering simple examples, beginning with the case of constant radial flow:  $r R U = c$ . For this case the torque is found to be

$$r^2 R \overline{u' v'} = -c r V$$



on requiring that both velocity and mixing stress be zero on the axis. The work flux is

$$r V R \overline{u' v'} = -c V^2,$$

inwards for  $c > 0$ , outwards for  $c < 0$ ; that is, opposed in direction to the radial mass flow. The source term is

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V R \overline{u' v'}) = \frac{c}{r} \frac{\partial V^2}{\partial r}.$$

Local heating occurs for inflow combined with swirl decreasing outwards and for outflow with swirl increasing outwards. The other combinations result in cooling. Practically, this means that radial inflow will result in the cooling of fluid in the core and the heating of that further out.

Having considered the effect of swirl on the work flux for a particular radial flow, we now take the other point of view. We take  $V = k r^{-1/2}$  and consider a variety of radial flows. Swirl distributions approximating to this form are commonly found in actual vortex flows; this was the case in the series of tests referred to here, and the agreement was particularly good for the configurations which exhibit the Ranque effect strongly. In any case, the qualitative results obtained for this particular swirl distribution are more generally applicable; a specialized form is chosen for simplicity. We table the results for some simple examples:

<i>Radial Flow</i>	<i>Work Flux</i>	<i>Source Term</i>
$r R U$	$r V R \overline{u' v'}$	$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V R \overline{u' v'})$
(1) $c r^2$	$-\frac{c k^2}{5} r$	$\frac{c k^2}{5 r}$
(2) $c r$	$-\frac{c k^2}{3}$	0
(3) $c$	$-\frac{c k^2}{r}$	$-\frac{c k^2}{r^3}$
(4) $c(a - r), \quad r \leq a$	$-c k^2 \left( \frac{a}{r} - \frac{1}{3} \right)$	$-\frac{a c k^2}{r^3}$
(5) $c r^2 (a - r), \quad r \leq a$	$-c k^2 \left( \frac{a}{5} - \frac{r}{7} \right) r$	$-c k^2 \left( \frac{2}{7} - \frac{a}{5 r} \right)$

Case (1) models flow in the core; cases (2) and (3), that in the body of the flow; case (4), that near the tube wall. Case (5) covers the whole radius from axis to wall. Again we have chosen solutions such that the torque approaches zero in the core.

These examples follow the pattern that emerged on considering constant radial mass flow. Similar results are found for the more general swirl distribution  $V = k r^n$  where  $n > -1$ . Stability considerations suggest that cases for which  $n < -1$  are not of physical interest. They were not found in experimental situations in the present study.

We conclude that the radial work flux is usually in the direction opposed to the radial mass flux. But in the Ranque-Hilsch vortex tube the gas is injected at the periphery and escapes through exits nearer the axis. Then radial flow must be predominantly inwards. We can expect that the core will commonly be cooled and the peripheral fluid heated through the working of the tangential stresses.

### 9. Work Flux due to Axial Stresses

The effect of the other important Reynolds' stress is not simple. The approximate equation governing axial momentum has been shown [1] to be

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r R \overline{u' w'}) = - \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Requiring that the stress be bounded at the axis, we find the work flux to be

$$r W R \overline{u' w'} = -W \int_0^r r \frac{\partial P}{\partial z} dr.$$

In order to demonstrate the properties that this function can be expected to possess typically, we consider a simple example:

$$W = - \frac{\partial P}{\partial z} = r - 1 \quad \text{for } r \leq 3,$$

incorporating the property that  $W$  and  $\partial P/\partial z$  are usually of opposite sign in the vortex flows studied. The work flux is

$$\begin{aligned} r R W \overline{u' w'} &= \frac{1}{3} r^2 (r - 1) \left( r - \frac{3}{2} \right) \\ &> 0 \quad \text{for } r < 1, \quad r > \frac{3}{2}, \\ &< 0 \quad \text{for } \frac{3}{2} > r > 1. \end{aligned}$$

This example illustrates the trends of more complex cases. Usually  $W$  and  $-\int_0^r r (\partial P/\partial z) dr$  have the same sign in an outer annulus, indicating an outwards

flux there. Most of the fluid in this outer annulus will be cooled; only that very near the wall will be heated. A complex flow pattern will be found in the core; it will not likely play an important part in overall energy separation.

## 10. The Efficient Mechanisms of Energy Redistribution

From the results of the four previous sections we conclude that the overall effect of each of the four important energy fluxes will be to transfer energy from the fluid in the core of the vortex to the fluid of the periphery. This agrees qualitatively with the behaviour of the Ranque-Hilsch vortex tube from which cooled fluid is withdrawn from the core at the inlet end of the tube. It was shown in Section 5 that the energy transfer mechanisms of turbulence are of the same order of magnitude as the observed energy redistributions.

We have already seen that it is to the thermal flux  $R \overline{u' h'}$  and the work fluxes that we must look for important energy movements. The consideration of the details of the physical processes giving rise to these suggests the following conclusions regarding their relative importance. The efficient mechanism of energy redistribution in the core is thermal transfer by turbulent mixing across the large radial pressure gradients found there. The further separation in the outer fluid is primarily due to work fluxes associated with turbulent mixing stresses.

The analysis presented here gives a theoretical framework for the most plausible of the qualitative ideas on the Ranque effect that have been developed over the past thirty years. It is realized, of course, that this treatment contains such radical simplifying assumptions that it may accurately be described as crude. However, most of the assumptions have at least empirical support; many were, indeed, suggested by consideration of experimental results. It is felt that the conclusions reached should be applicable to the particular vortex tube configuration investigated by the present writer and probably for most of the configurations considered in previous studies of the Ranque effect.

### *Symbols*

- $r, z$  radial and axial co-ordinates;  
 $u, v, w$  radial, tangential and axial velocity components ( $U, u'$ , etc. are time-mean values and perturbations to them);  
 $\rho, p, h, h_0$  fluid density, pressure, enthalpy, and total enthalpy ( $R, \rho'$ , etc. are time-mean values and perturbations to them);  
 $\alpha, \beta, \delta, \epsilon, \eta$  quantities small with respect to unity.

## Abstract

The energy separation within a vortex tube filled with turbulent compressible fluid is investigated with an order-of-magnitude analysis of the energy equation. The physical processes corresponding to the important terms are: a heat flux due to turbulent mixing of the compressible fluid through radial pressure and temperature gradients, a flux of total energy produced by Archimedean forces, and work fluxes associated with the two most important Reynolds' stresses. All these fluxes will commonly be outwards and will tend to cool the vortex core. Experimental results are used to estimate the relative magnitudes of the contributions. The Archimedean effect seems to be the least important.

## REFERENCES

- [1] A. J. REYNOLDS, *On the Dynamics of Turbulent Vortical Flow*, Z. angew. Math. Phys., 12, 149 (1961).
- [2] R. WESTLEY, *A Bibliography and Survey of the Vortex Tube*, Note Nr. 9, College of Aeronautics, Cranfield (1954).
- [3] E. H. OTTEN, *Producing Cold Air - Simplicity of the Vortex-tube Method*, Engineering, 186, 4821, 154 (1958).
- [4] H. SPRENGER, *Über thermische Effekte in Resonanzröhren*, Mitt. Inst. Aerodyn., ETH, Zürich, Nr. 21 (1954).
- [5] R. WESTLEY, *Vortex Tube Performance Data Sheets*, Note Nr. 67, College of Aeronautics, Cranfield (1957).
- [6] J. P. HARTNETT and E. R. G. ECKERT, *Experimental Study of the Velocity and Temperature Distribution in a High-velocity Vortex-type Flow*, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 79, 751 (1957).
- [7] J. E. LAY, *An Experimental and Analytical Study of Vortex-Flow Temperature Separation by Superposition of Spiral and Axial Flows*, Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 81, [C], 3, 202, 213 (1959).
- [8] W. A. SCHELLER and G. M. BROWN, *The Ranque-Hilsch Vortex Tube*, Ind. Eng. Chem. 49, 1013 (1957).
- [9] R. G. DEISSLER and M. PERLMUTTER, *An Analysis of the Energy Separation in Laminar and Turbulent Compressible Vortex Flows*, Proc. 1958 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Stanford University, Palo Alto, California.
- [10] J. O. HINZE, *The Effect of Compressibility on the Turbulent Transport of Heat in a Stably Stratified Atmosphere*, Proc. Symposium on Atmospheric Diffusion and Air Pollution, Academic Press, Vol. 6, in *Advances in Geophysics*, (1959), p. 229.
- [11] C. D. PENGELLEY, *Flow in a Viscous Vortex*, J. Appl. Phys., 28, 1, 86 (1957).
- [12] N. ROTT, *On the Viscous Core of a Line Vortex*, Z. angew. Math. Phys. 9b, 5/6, 543 (1958); 10, 1, 73 (1959).
- [13] C. D. FULTON, *Ranque's Tube*, Refrig. Eng. 58, 5, 473 (1950).
- [14] R. KASSNER and E. KNOERNSCHILD, *Friction Laws and Energy Transfer in Circular Flow*, Tech. Rep. Nr. F-TR-2198-ND, GS-USAF Wright Patterson AF Base, Nr. 78 (1947).
- [15] A. J. REYNOLDS, *On Energy Separation by Aerodynamic Processes*, J. Aero/Space Sciences, 28, 3, 244 (1961).

- [16] C. H. B. PRIESTLEY and W. C. SWINBANK, *Vertical Transport of Heat by Turbulence in the Atmosphere*, Proc. Roy. Soc. Lond., A 189, 543 (1947).  
[17] A. EINSTEIN, Ann. Phys. Lpz., 17, 549 (1905).

### *Zusammenfassung*

Die Energieverteilung in einem mit turbulenter kompressibler Flüssigkeit gefüllten Wirbelrohr wird durch Berechnung der Gliedergrösse der Energiegleichung untersucht. Die physikalischen Vorgänge, die den wichtigen Gliedern entsprechen, sind folgende: ein Wärmefluss, veranlasst durch turbulente Mischung der kompressiblen Flüssigkeit infolge der radialen Druck- und Temperaturgradienten; ein Fluss des Gesamtwärmeinhaltes, verursacht durch die Schwimmkraft; und die Arbeitsflüsse, die von den beiden wichtigsten Reynoldsschen scheinbaren Spannungen abhängen. Alle diese Flüsse sind gewöhnlich nach aussen gerichtet und dienen zum Kühlen des Wirbelkerns. Die experimentellen Ergebnisse werden zu einer Abschätzung der Grösse dieser Beiträge gebraucht. Der Schwimmkrafteffekt scheint am wenigsten wichtig.

(Received: November 18, 1960.)

---

## Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

---

### **Note on the Large Deflection of a Circular Plate under a Concentrated Load**

By SUKUMAR BASULI, Calcutta, India<sup>1)</sup>

#### **Introduction**

For the large deflection of a plate we usually get non-linear equations which cannot be exactly solved. BERGER [1]<sup>2)</sup> has shown that if, in deriving the differential equations from strain energy, the strain energy due to second strain invariant in the middle plane of the plate is neglected, a simple fourth order differential equation coupled with a non-linear second order equation is obtained. He has solved these differential equations for the problem of circular plates under various boundary conditions subjected to *normal uniform load* throughout the plate. Though his approximation lacks sufficient technical interpretation for its justification, he has shown that his results for deflection, displacement, and stresses tally with the known results for all practical purposes. In this note following BERGER's method, an attempt has been made to obtain the deflection for a circular plate under a *concentrated load* at the centre.

1. In the case of circular symmetry if  $h$  is the thickness of the plate,  $w$  the displacement perpendicular to its middle plane,  $u$  the radial displacement in the

---

<sup>1)</sup> Brahmananda Keshab Chandra College.

<sup>2)</sup> Numbers in brackets refer to References, page 362.



middle plane under concentrated load at the centre, then, following BERGER'S method, the differential equations for  $w$  and  $u$  will be

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \alpha^2 w\right) = 0, \quad (1.1)$$

except at the load and

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 = \frac{\alpha^2 h^2}{12} \quad (1.2)$$

where  $\alpha$  is a constant of integration.

Again considering the radial stress and shearing stress on a concentric circular ring of radius  $r$  and the concentrated load  $P$  at the centre we have [2], as  $r$  tends to zero

$$D \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right) = \frac{E h}{1 - \sigma^2} \left[\frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 + \sigma \frac{u}{r}\right] \frac{dw}{dr} + \frac{P}{2 \pi r} \quad (1.3)$$

where

$D$  = Flexural rigidity of the plate

$$= E h^3 / 12 (1 - \sigma^2),$$

$\sigma$  = POISSON'S ratio,

$E$  = YOUNG'S modulus.

Substituting (1.2) into equation (1.3), we have the relation

$$Dr \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \alpha^2 w\right) = -\frac{E h}{1 + \sigma} u \frac{dw}{dr} + \frac{P}{2 \pi}$$

as  $r$  tends to zero.

At the centre of the plate both  $u$  and  $dw/dr$  will be zero; hence we have

$$\lim_{r \rightarrow 0} Dr \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} - \alpha^2 w\right) = \frac{P}{2 \pi} \quad (1.4)$$

2. A circular plate under concentrated load at the centre with clamped edge.

Let the radius of the plate be  $a$ . Then for a clamped edge the boundary conditions will be

$$w = \frac{dw}{dr} = 0, \quad u = 0 \quad \text{when} \quad r = a. \quad (2.1)$$

Let us take  $w$  in the form

$$w = A I_0(\alpha r) + B \left(K_0(\alpha r) + \log \frac{r}{a}\right) + c \quad (2.2)$$

where  $I_0(\alpha r)$  and  $K_0(\alpha r)$  are the modified Bessel functions of the first and second kind of order zero. Substituting this  $w$  in (1.4) we have

$$B = -\frac{P}{2 \pi D \alpha^2}. \quad (2.3)$$

Using boundary conditions for  $w$  and the relations [3]

$$I'_0(\alpha r) = I_1(\alpha r), \quad K'_0(\alpha r) = -K_1(\alpha r)$$

and

$$I_1(\alpha r) K_0(\alpha r) + I_0(\alpha r) K_1(\alpha r) = \frac{1}{\alpha r}$$

we get

$$A = \frac{\alpha a K_1(\alpha a) - 1}{\alpha a I_1(\alpha a)} B, \quad C = \frac{I_0(\alpha a) - 1}{\alpha a I_1(\alpha a)} B. \quad (2.4)$$

Taking these values of  $A$ ,  $B$  and  $C$ ,  $w$  is given by

$$w = -\frac{P}{2\pi D \alpha^3 a I_1(\alpha a)} \left\{ \alpha a [K_1(\alpha a) I_0(\alpha r) + K_0(\alpha r) I_1(\alpha a)] \right. \\ \left. + \alpha a I_1(\alpha a) \log \frac{r}{a} - I_0(\alpha r) + I_0(\alpha a) - 1 \right\}. \quad (2.5)$$

To find the displacement  $u$  we have from (1.2) and (2.2)

$$u r = \frac{\alpha^2 \hbar^2}{24} r^2 - \frac{1}{2} \int \left[ A^2 \alpha^2 r I_1^2(\alpha r) + B^2 \alpha^2 r K_1^2(\alpha r) \right. \\ \left. - 2 A B \alpha^2 r I_1(\alpha r) K_1(\alpha r) + 2 A B \alpha I_1(\alpha r) \right. \\ \left. - 2 B^2 \alpha K_1(\alpha r) + \frac{B^2}{r} \right] dr + F$$

where  $F$  is a constant of integration.

Integrating these expressions involving Bessel functions [4]

$$u r = \frac{\alpha^2 \hbar^2}{24} r^2 - \frac{A^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 r^2 [I_1^2(\alpha r) - I_0^2(\alpha r)] + \alpha r I_1(\alpha r) I_0(\alpha r) \right\} \\ - \frac{B^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 r^2 [K_1^2(\alpha r) - K_0^2(\alpha r)] - \alpha r K_1(\alpha r) K_0(\alpha r) \right\} \\ + A B \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 r^2 [I_1(\alpha r) K_1(\alpha r) + I_0(\alpha r) K_0(\alpha r)] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \alpha r [I_1(\alpha r) K_0(\alpha r) - I_0(\alpha r) K_1(\alpha r)] \right\} \\ - A B I_0(\alpha r) - B^2 K_0(\alpha r) - \frac{B^2}{2} \log r + F \quad (2.6)$$

where  $B$  and  $A$  are given by (2.3) and (2.4).

Using the boundary condition for  $u$

$$F = \frac{B^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \log a + \frac{1 - I_0(\alpha a)}{\alpha a I_1(\alpha a)} - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - I_0(\alpha a)}{I_1(\alpha a)} \right)^2 - \frac{\alpha^2 \hbar^2 a^2}{24} \right\}. \quad (2.7)$$

To determine the constant  $\alpha$ , we shall use the condition that  $u = 0$  as  $r \rightarrow 0$ , which gives

$$\frac{B^2}{2} \left\{ -\frac{1}{2} + \gamma + \log \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha a K_1(\alpha a) - 1}{\alpha a I_1(\alpha a)} \right\} + F = 0$$

or

$$\left( \frac{P a^2}{\pi D \hbar} \right)^2 = \frac{\frac{1}{3} (\alpha a)^6}{\gamma + \log \frac{\alpha a}{2} - \frac{I_0(\alpha a) + \alpha a K_1(\alpha a) - 2}{\alpha a I_1(\alpha a)} - \frac{1}{2} \left( \frac{I_0(\alpha a) - 1}{I_1(\alpha a)} \right)^2} \quad (2.8)$$

where  $\gamma$  is EULER's constant.

The deflection will be maximum at the centre of the plate and it is given by

$$w_0 = \frac{P}{2\pi D \alpha^2} \left\{ \gamma + \log \frac{\alpha a}{2} - \frac{I_0(\alpha a) + \alpha a K_1(\alpha a) - 2}{\alpha a I_1(\alpha a)} \right\}. \quad (2.9)$$

As  $\alpha$  tends to zero the equations (1.1) and (1.4) reduce to the corresponding equations for the problem of small deflections of circular plates under concentrated load at the centre.

Taking the limit of (2.5) as  $\alpha$  tends to zero we have [5]

$$w = \frac{P}{8\pi D} \left( -r^2 \log \frac{a}{r} + \frac{1}{2} (a^2 - r^2) \right), \quad (2.10)$$

which is the expression for small deflection of a circular plate under concentrated load at the centre, the boundary being clamped.

For a thin plate flexural rigidity of the plate will tend to zero and  $\alpha$  will be infinitely large. Expanding the Bessel functions asymptotically [6] in (2.8) and (2.9) and taking the limit as  $\alpha$  tends to  $\infty$ , we have on the assumption that  $h^3 \alpha^2$  exists, the central deflection for a thin membrane represented by the term

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{w_0}{(P a^2/E h)^{1/3}} = \left( \frac{1 - \sigma^2}{2\pi(\gamma - 1/2)} \right)^{1/3} \gamma.$$

Putting  $\sigma = 0.3$  we get

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{w_0}{(P a^2/E h)^{1/3}} = 0.713. \quad (2.11)$$

In the case of a membrane the approximate formula deduced by TIMOSHENKO, WOINOWSKY-KRIEGER [7] leads for the deflection at the centre to the result

$$\frac{w_0}{(P a^2/E h)^{1/3}} = 0.789. \quad (2.12)$$

For values of  $\alpha$  other than the extreme ones discussed above, a graph (Figure 1) has been drawn showing  $w_0/h$  against  $P a^2/\pi D h$ .

3. A circular plate under concentrated load at the centre with supported edge.

At the supported edge deflection, the bending moment and displacement normal to the boundary will be zero. In this case the boundary conditions will be

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{dw}{dr} = 0, \quad u = 0, \quad \text{when } r = a. \quad (3.1)$$

Taking the same expression for  $w$  as before and using these boundary conditions, the arbitrary constants are given by

$$B = -\frac{P}{2\pi D \alpha^2}, \quad (3.2)$$

$$A = \frac{H K_0(\alpha a) + \alpha a K_1(\alpha a) - 1}{\alpha a I_1(\alpha a) - H I_0(\alpha a)} B, \quad (3.3)$$

$$C = \frac{I_0(\alpha a) - 1}{\alpha a I_1(\alpha a) - H I_0(\alpha a)} B \quad (3.4)$$

where

$$H = \frac{\alpha^2 a^2}{1 - \sigma}. \quad (3.5)$$

Substituting these values of  $A, B$  and  $C$  in the expression for  $w$  and after simplification we have

$$w = \frac{P}{2 \pi D \alpha^2 [H I_0(\alpha a) - \alpha a I_1(\alpha a)]} \left\{ \begin{aligned} &\alpha a [K_1(\alpha a) I_0(\alpha r) + K_0(\alpha r) I_1(\alpha a)] \\ &+ \alpha a I_1(\alpha a) \log \frac{r}{a} - I_0(\alpha r) + I_0(\alpha a) - 1 \\ &+ H \left[ K_0(\alpha a) I_0(\alpha r) - K_0(\alpha r) I_0(\alpha a) - I_0(\alpha a) \log \frac{r}{a} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

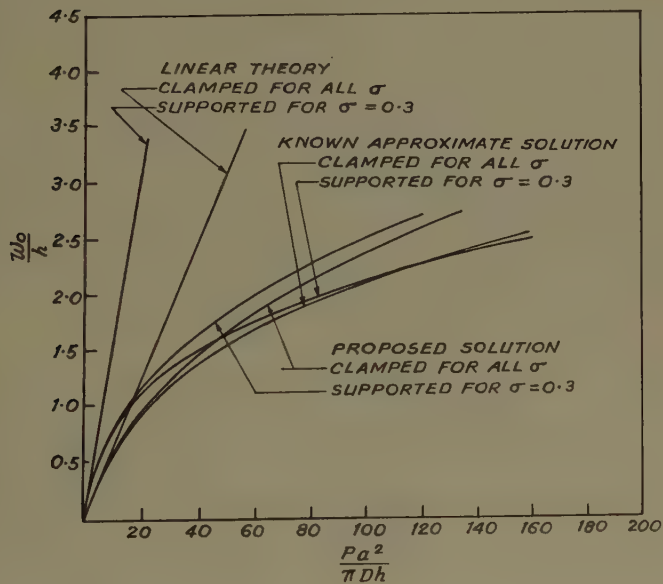


Figure 1  
Values of  $\alpha$  showing  $\omega_0/h$  against  $Pa^2/\pi D h$ .

The displacement  $u$  in the plane of the plate will be given by the expression (2.6) where as  $B, A$  and  $C$  are given by (3.2), (3.3) and (3.4) respectively.

Proceeding exactly as before

$$F = \frac{B^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} + \log a - \frac{(H-1) [I_0(\alpha a) - 1]}{H I_0(\alpha a) - \alpha a I_1(\alpha a)} \right. \\ \left. + \frac{\left( H + \frac{H^2}{2} - \frac{\alpha^2 a^2}{2} \right) [I_0(\alpha a) - 1]^2}{[H I_0(\alpha a) - \alpha a I_1(\alpha a)]^2} \right\} - \frac{\alpha^2 a^2 h^2}{24} \quad (3.7)$$

and the equation to determine  $\alpha$  will be

$$\left(\frac{P a^2}{\pi D h}\right)^2 = \frac{\frac{1}{3} (\alpha a)^6}{\gamma + \log \frac{\alpha a}{2} + \frac{I_0(\alpha a) + \alpha a K_1(\alpha a) - 2 - H[I_0(\alpha a) - K_0(\alpha a) - 1]}{H I_0(\alpha a) - \alpha a I_1(\alpha a)}} + \frac{\left[H + \frac{H^2}{2} - \frac{\alpha^2 a^2}{2}\right] [I_0(\alpha a) - 1]^2}{[H I_0(\alpha a) - \alpha a I_1(\alpha a)]^2}.$$

The central deflection will be given by

$$w_0 = \frac{P}{2 \pi D \alpha^2} \left\{ \gamma + \log \frac{\alpha a}{2} + \frac{I_0(\alpha a) + \alpha a K_1(\alpha a) + H K_0(\alpha a) - 2}{H I_0(\alpha a) - \alpha a I_1(\alpha a)} \right\}. \quad (3.9)$$

Again as  $\alpha$  tends to zero equation (3.6) reduces to

$$w = \frac{P}{16 \pi D} \left[ \frac{3 + \sigma}{1 + \sigma} (a^2 - r^2) + 2 r^2 \log \frac{r}{a} \right] \quad (3.10)$$

a well known result for small deflection. As  $\alpha$  tends to infinity the same result (2.11) can also be obtained from (3.8) and (3.9) to give the central deflection for a membrane with supported edge and loaded at the centre. In the same figure referred to before  $w_0/h$  has been plotted against  $P a^2/\pi D h$  with  $\sigma = 0.3$ .

In conclusion, the author wishes to thank Prof. B. SEN, D. Sc., F. N. I. of Jadavpur University for his guidance in the preparation of this note.

## REFERENCES

- [1] H. M. BERGER, J. appl. Mech. 22, 465 (1955).
- [2] TIMOSHENKO, WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells* (1959), p. 402, eq. 234.
- [3] GRAY, MACROBERT and MATHEWS, *A Treatise on Bessel Functions and their applications to Physics*, pp. 20, 22 and 25.
- [4] N. W. MCLACHLAN, *Bessel Functions for Engineers* (1955), p. 203, formula 193, p. 206, formula 231 and 234.
- [5] TIMOSHENKO, WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells* (1959), p. 69.
- [6] GRAY, MACROBERT and MATHEWS, *A Treatise on Bessel Functions and their applications to Physics*, pp. 55 and 58.
- [7] TIMOSHENKO, WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells* (1959), p. 415, eq. (Y) and p. 416, Table 83.
- [8] TIMOSHENKO, WOINOWSKY-KRIEGER, *Theory of Plates and Shells* (1959), p. 68.

## Zusammenfassung

Es werden die grossen Deformationen einer Kreisplatte unter zentrischer Einzellast nach der Methode von BERGER ermittelt.

(Received: 11 November, 1960.)



## Non-Steady Periodic Boundary Layer

By Miss DURGA ROY, Calcutta, India

### Introduction

For many years people are trying to study the periodic phenomenon of the wake.

It is actually the periodicity of the wake for which it is needed to study the non-steady character of the motion. Calculations on non-steady boundary layer equations have been performed by many authors. BLASIUS [1]<sup>1)</sup> in 1908 first showed the approximation method of solving non-steady boundary layer equations. In the same year BOLTZE [2] performed the calculation on steady boundary layer equations of an axi-symmetric body of revolution. It is however also very instructive to study the development of boundary layer periodic in time. In the year 1932, SCHLICHTING [3] found out a solution periodic in time by the approximation method of the two dimensional non-steady boundary layer equations. In this paper the same method is applied to find out a solution periodic in time of non-steady boundary-layer equations of an axi-symmetric body of revolution. The only difference is that in this case a different series expansion for the stream function is taken.

### Boundary Layer Equations and its Solution

It is shown in the case of two dimensional periodic boundary layer that the successive approximation method may be used in cases when the amplitude of oscillation is small compared with the dimensions of the body. This condition is satisfied in the two dimensional case. It can be easily verified that this is satisfied in the axis-symmetric case too.

The boundary layer equations of an axially-symmetric body of revolution are given by,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(r u) + \frac{\partial}{\partial y}(r v) = 0. \quad (1)$$

where  $r(x)$  is the radius of the cross-section of the body of revolution.

The equations (1) are to be solved with the boundary conditions,

$$y = 0, \quad u = v = 0, \quad y = \infty, \quad u = U(x, t), \quad (2)$$

where  $U(x, t)$  denotes the potential flow about the body of revolution.

The pressure impressed on the body follows from the non-steady BERNOULLI equation,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (3)$$

Applying the general approximation method (1) in finding out a solution of the non-steady boundary layer equations we can write

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t). \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Number in brackets refer to References, page 366.

Thus from (4) and (1) we obtain the first and second approximation equations which are given by

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = U \frac{\partial U}{\partial x} - u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} - v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad (5)$$

with boundary conditions

$$y = 0, \quad u_0 = u_1 = 0, \quad y = \infty, \quad u_0 = U(x, t), \quad u_1 = 0. \quad (6)$$

Let us take the potential flow to be periodic in time, i.e.

$$U(x, t) = U_0(x) e^{i n t}.$$

We define  $\eta = y \sqrt{n/\nu}$  a dimensionless quantity.

Let

$$\psi_0(x, y, t) = \sqrt{\frac{\nu}{n}} U_0(x) r \zeta_0(\eta) e^{i n t} \quad (7)$$

hence,

$$u_0 = U_0 \zeta'_0 e^{i n t}, \quad v_0 = - \frac{\partial U_0}{\partial x} \sqrt{\frac{\nu}{n}} \zeta_0 e^{i n t} + \sqrt{\frac{\nu}{n}} \frac{U_0}{r} \zeta_0 e^{i n t} \frac{dr}{dx}. \quad (8)$$

From (8), (5), and (6) we get

$$i \zeta'_0 - \zeta_0''' = i \quad (9)$$

with boundary condition

$$\zeta'_0 = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0, \quad \zeta'_0 = 1 \quad \text{at} \quad \eta = \infty.$$

The solution of (9) is given by

$$\zeta'_0 = 1 - e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}} \eta}. \quad (10)$$

Taking the real part we get

$$u_0 = U \left[ \cos n t - \exp\left(-\frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(n t - \frac{\eta}{\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (11)$$

For the second approximation let the stream function be of the form

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y, t) = \sqrt{\frac{\nu}{n}} \left[ U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} \frac{r}{n} \{ \zeta_{1a}(\eta) e^{2i n t} + \bar{\zeta}_{1b}(\eta) \} \right. \\ \left. + \frac{U^2}{n} \frac{dr}{dx} \{ \zeta_{1c}(\eta) e^{2i n t} + \zeta_{1d}(\eta) \} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

From (7), (8), and (12) we write the real expression for  $u_0$ ,  $v_0$ , and  $u_1$ , i.e.

$$u_0 = \frac{U_0}{2} (\zeta'_{1a} e^{i n t} + \bar{\zeta}'_{1b} e^{-i n t}), \quad v_0 = \sqrt{\frac{\nu}{n}} e^{i n t} \zeta_0 \left\{ -\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{U_0}{r} \frac{\partial r}{\partial x} \right\}. \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} u_1 = \frac{U}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{n} \{ \zeta'_{1a} e^{2i n t} + \bar{\zeta}'_{1b} e^{-2i n t} + \zeta'_{1b} + \bar{\zeta}'_{1a} \} \\ + \frac{U^2}{2 n r} \frac{dr}{dx} \{ \zeta'_{1c} e^{2i n t} + \bar{\zeta}'_{1d} e^{-2i n t} + \zeta'_{1d} + \bar{\zeta}'_{1c} \}. \end{aligned} \quad (13b)$$

Using (13), (5), and (6) we get

$$2 i \zeta'_{1a} - \zeta_{1a}'' = \frac{1}{2} (1 - \zeta_0'^2 + \zeta_0 \zeta_0''), \quad (14)$$

$$2i\zeta'_{1c} - \zeta'''_{1c} = -\frac{\zeta_0\zeta''_0}{2}, \quad (15)$$

$$-\zeta'''_{1b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\zeta'_0\bar{\zeta}'_0 + \frac{1}{4}(\zeta_0\bar{\zeta}''_0 + \bar{\zeta}_0\zeta''_0), \quad (16)$$

$$-\zeta'''_{1d} = -\frac{1}{2}(\zeta_0\bar{\zeta}''_0 + \bar{\zeta}_0\zeta''_0). \quad (17)$$

The normal and tangential components of the periodic contribution must vanish at the wall, whereas at a large distance from it only the tangential component vanishes.

Equations (14) and (16) are exactly the same as in the two dimensional case so the solutions are known. Equations (15) and (17) are solved actually. Putting  $\eta' = \eta/\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \zeta'_{1c} = \frac{(\eta' - 3)i}{4} \exp[-(1+i)\eta'] - \frac{\eta'}{2} \exp[-(1+i)\eta'] \\ - \frac{i}{4} \exp[-2\eta'(1+i)] + \frac{7i}{4} \exp[-\sqrt{2}\eta'(1+i)]. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta'_{1d} = \frac{1}{2} + [(\eta' - 1) - i(\eta' + 2)] \exp[-(1+i)\eta'] \\ + \frac{1}{4} [(\eta' - 1) + i(\eta' + 2)] \exp[-(1-i)\eta'], \\ \zeta'_{1c} = \zeta'_{1d} = 0 \quad \text{at} \quad \eta = 0, \quad \zeta'_{1c} = 0, \quad \zeta'_{1d} = \frac{1}{2} \quad \text{at} \quad \eta = \infty \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

It is found that only the boundary conditions at the wall can be satisfied, and that at a large distance the tangential component is finite but not zero.

Thus from the second approximation we see that at a large distance from the body i. e. outside the boundary layer the velocity does not vanish.

Its magnitude is given by

$$u_2(x, \infty, t) = -\frac{3}{4n} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{U_0^2}{2nr} \frac{dr}{dx}. \quad (20)$$

So we see the remarkable result that a potential flow which is periodic with respect to time induces a steady secondary motion at a large distance from the wall of the body of revolution. This steady secondary  $u_2$  is composed of two terms and this  $u_2$  is the same as in the two dimensional case if we neglect the second term of it.

Its magnitude given by equation (20) is independent of the co-efficient of viscosity but depends on the shape of the body, i. e. the radius of the cross-section of the body of revolution.

### Acknowledgement

The author is indebted to Prof. J. L. SYNGE for his kind help in preparing this paper.

The research has been sponsored by the scholarship of the Institute for Advanced Study, Dublin, where this paper was completed actually.

## REFERENCES

- [1] H. BLASIUS. Z. Math. u. Phys. 56, 1 (1908).
- [2] E. BOLTZE, *Grenzschichten an Rotationskörpern in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung* (Thesis, Göttingen 1908).
- [3] H. SCHLICHTING. Phys. Z. 33, 327 (1932).

*Zusammenfassung*

Es wird die nichtstationäre Grenzschichtbewegung an einem Rotationskörper untersucht und die Störungsgeschwindigkeit bestimmt. Ähnlich wie im ebenen Fall verschwindet diese in grösserer Entfernung nicht und ist stationär.

(Received: November 29, 1960.)

---

 Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques
 

---

**Die Fernrohre und Entfernungsmesser.** Von A. KÖNIG und H. KÖHLER (Springer-Verlag, Berlin 1959, 3. Auflage). 475 S., 471 Fig.; DM 88.–.

Es handelt sich um eine durch H. Köhler vollständig neu bearbeitete Auflage des bekannten Buches von A. KÖNIG. Der erste und umfangreichste Teil behandelt zunächst die theoretischen Grundlagen und dann die wichtigsten heute gebräuchlichsten optischen Systeme, wie Hand-, Beobachtungs-, Zielfernrohre, geodätische, feinmesstechnische, astronomische und photographische Fernrohre und enthält ausführliche Tabellen über Linsenobjektive, aplanatische Spiegelsysteme und Okulare, ebenso wurden mit einer gewissen Vollständigkeit die verschiedenen Prüfmethode aufgenommen. Nach einem kurzen zweiten Teil über Mikrometer, der praktisch unverändert aus den früheren Auflagen übernommen wurde, folgen noch die verschiedenen Typen von optischen Entfernungsmessern, wie sie für militärische, geodätische und andere zivile Zwecke Verwendung finden oder fanden. Anhangsweise finden sich noch Zusammenstellungen der wichtigsten Beziehungen der Gaußschen Dioptrik und der lichttechnischen Einheiten, ebenso ein Abriss der Geschichte des Fernrohres und Literaturangaben. Das Buch, das weder zu sehr auf technische Einzelheiten noch auf theoretische Entwicklungen eingeht, stellt eine ausgezeichnete und empfehlenswerte Einführung in die praktische Optik dar.

E. ROTH-DESMEULES

**Sammelband zur statistischen Theorie der Turbulenz.** Mit Beiträgen von A. M. KOLMOGOROV, A. M. OBUCHOW, A. M. JAGLOM und A. S. MONIN. In deutsche Sprache übertragen von Dr. H. GOERING (Akademischer Verlag, Berlin 1958). 228 S., 27 Abb.; DM 25.50.

Die statistische Darstellung der Turbulenz der Strömungsfelder von Flüssigkeiten und Gasen ist in den letzten 15 Jahren durch die grundlegenden Beiträge von G. T. TAYLOR, VON KARMAN, HEISENBERG, KOLMOGOROV und anderen weitgehend entwickelt und gefördert worden. Ein massgeblicher Anteil kommt den russischen Arbeiten zu. Da über diese Veröffentlichungen in den bis heute erschienenen zusammenfassenden Abhandlungen und Lehrbüchern oft nur sehr spärlich



berichtet wird, ist es lebhaft zu begrüßen, dass der Akademische Verlag, Berlin, einen Sammelband über die bedeutendsten russischen Arbeiten herausgegeben hat. Die Übersetzung ist in klarer Formulierung durch Dr. Herbert Goering ausgeführt worden.

Unter den wiedergegebenen Publikationen befinden sich die grundlegenden Arbeiten von A. M. OBUCHOW über die statistische Beschreibung und Struktur turbulenter Felder. Ferner die Notizen von KOLMOGOROV über die Entartung isotroper Turbulenz in einer inkompressiblen Flüssigkeit sowie die Zerstäubung von Tropfen in einer turbulenten Strömung. Schliesslich gebührt der Arbeit von A. S. MONIN und A. M. OBUCHOW über die fundamentalen Gesetzmässigkeiten der turbulenten Vermischung in der bodennahen Atmosphäre besondere Erwähnung.

R. SÄNGER

**Wirbelströme und Schirmung in der Nachrichtentechnik.** Von H. KADEN (Technische Physik in Einzeldarstellungen, Bd. 10) (Springer Verlag, Berlin 1959). 354 S., 195 Abb.; DM 66.–

Das vorliegende Buch ist eine vollständig umgearbeitete und ergänzte Neuauflage der 1950 erschienenen Monographie «Die elektromagnetische Schirmung in der Fernmelde- und Hochfrequenztechnik». Alle Untersuchungen sind für stationäre Wechselfelder durchgeführt. Fussend auf den Maxwell'schen Gleichungen in Vektorschreibweise und unter Benutzung angepasster Koordinatensysteme, werden in zwölf Kapiteln etwa folgende Probleme durchgerechnet und Näherungsverfahren dazu abgeleitet: Wirbelströme in Blechen, Drähten und Kugeln; Schirmwirkung metallischer Hüllen gegen äussere magnetische Wechselfelder in Form von zwei parallelen Platten, Hohlzylinder und dünnwandiger Kugel aus magnetischem und unmagnetischem Material; Rück- und Schirmwirkung metallischer Hüllen gegen linear polarisierte elektromagnetische Wellen (Radar); metallische Hüllen mit innerer Felderregung, zum Beispiel koaxiale Leitung, Doppelleitung und Sternvierer mit koaxialem Metallmantel, Spulen in Metallhüllen; mehrschichtige Schirme aus verschiedenen Metallen; Durchgriff von elektrischen und magnetischen Feldern durch Spalte, Schlitze und Löcher, was zu Kopplungen zweier Leitungen benutzt wird (Richtkoppler der Mikrowellentechnik); Wirkung begrenzter offener Schirme; Schirmwirkung von Drahtgittern; Schirmung gegen Störströme bei Durchführungskondensatoren, Doppelkontaktbuchsen und -federn; Kopplungswiderstand von Leitungsschirmen (wichtig für das Nebensprechen). Das Schlusskapitel orientiert über wichtige Eigenschaften der Zylinder- und Kugelfunktionen.

So reichhaltig auch der Inhalt erscheint, es hat alles einen starken innern Zusammenhang, was das Studium einer Einzelfrage sehr erleichtert. Das Buch dient aber nicht nur dem Theoretiker, sondern durch seine zahlreichen numerischen Diagramme und Tabellen ebenso dem praktizierenden Ingenieur, der mit Schirmungsaufgaben zu tun hat. Dem Buch ist eine recht weite Verbreitung zu wünschen, denn in seiner Vollständigkeit und Abgeschlossenheit steht es wohl einzig da.

H. WEBER

**Report on the Algorithmic Language ALGOL 60.** Von PETER NAUR (Acta Polytechnica, Copenhagen 1960) 40 S.; Sw.-Kr. 7.–

Die algorithmische Sprache ALGOL wurde geschaffen, um Rechenprozesse der numerischen Mathematik in einer Form zu beschreiben, welche einerseits möglichst lesbar sein sollte, andererseits aber die automatische Übersetzung in ein Maschinenprogramm durch den Rechenautomaten selber erlaubt. Der vorliegende Bericht enthält, ausser einigen einführenden Bemerkungen, die definierenden Re-



geln der Sprache in konzentrierter Form und ist keineswegs als Einführung für den Benützer gedacht. Es handelt sich im übrigen um einen Abdruck aus *Numerische Mathematik* 2, 106 (1960).

P. LÄUCHLI

### VIII. Internationaler Astronautischer Kongress - Barcelona 1957.

Berichte – Proceedings – Comptes rendus. Herausgegeben von P. J. BERGERON, W. VON BRAUN, K. A. EHRLICHE, F. HECHT, J. MARIAL, E. SÄNGER, K. SCHÜTTE, L. I. SEDOV, L. R. SHEPHERD, S. F. SINGER. Schriftleitung F. HECHT (Springer-Verlag, Wien 1958). VII + 607 S., 233 Fig., 91 Tab.; SFr. 128.–.

Der VIII. Kongress der Internationalen Astronautischen Föderation (Barcelona, 6.–12. Oktober 1957) fand statt unmittelbar nach dem Start des ersten Erdsatelliten «Sputnik I» (4. Oktober 1957), dem erfolgreiche Abschnüsse weiterer Satelliten folgten. Es war sowohl technisch wie geschichtlich eine sehr interessante Zeitperiode von angestrengten Bemühungen um den effektiven Beginn der Raumfahrt im Rahmen des Internationalen Geophysikalischen Jahres 1957/58.

Einen interessanten Einblick in den Stand der damaligen Arbeiten vermittelt der vorliegende Bericht. Er enthält 46 Beiträge in deutscher, englischer, französischer, italienischer und russischer Sprache, jeweils begleitet von anderssprachigen Zusammenfassungen. Die behandelten Themata lassen sich etwa folgendermassen einteilen:

- I. Allgemeines über Astronautik – Referate über wissenschaftliche und technische Ziele der Raumfahrt, wie u. a. Erforschung von Sonne, Planeten sowie von intelligentem Leben auf Planeten;
- II. Erforschung der hohen Atmosphäre – Resultate der Atmosphärenmessungen durch Ballone und Ballontechnik;
- III. Raumfahrt- und Astro-Physik – Schutzmassnahmen gegen Andruck, Dynamik der Raumkörperbewegungen und die zugehörigen Berechnungsmethoden sowie Programmierungen, relativistische Raketenmechanik, Meteoriten, Fragen hoher Temperaturen sowie Untersuchungen von Räumen mit Daseinsbedingungen für belebte Organismen (Ökosphären);
- IV. Raumfahrttechnik – Probleme der Rückkehr von Satelliten, Steuerung, Stufenprinzip, Lastenoptimalisierung, Projekt einer dreistufigen bemannten Kleinstrakete «Meteor-Junior»;
- V. Raketenantriebe – Stabilität der Flüssigkeitsraketen-Motoren, Variation des Raketenschubes, Strömungen von Zweiphasengemischen, Nuklear- und Ionenantriebe;
- VI. Künstliche Satelliten – Studien über Gewichtsaufwand für Satelliten, Anwendungsmöglichkeiten von Satelliten zu Kommunikations- und Messzwecken sowie Feststellung und Beobachtung von Satelliten selbst;
- VII. Raumfahrtbiologie und -medizin – Herstellung des gewichtslosen Zustandes in Flügen, biosphärischer Index, Einflüsse einer totalen Sonnenfinsternis aufs Blut;
- VIII. Raumfahrtrecht – Entstehung von neuen Rechtsfragen durch die Raumfahrt bedingt.

Die Vielfalt und der Umfang des Dargebotenen verunmöglichen es, hier auf die Einzelheiten einzugehen. Der interessierte Leser findet im Barcelona-Bericht reichliches Studienmaterial, das einen zweckmässigen Anschluss an die inzwischen weiter vertieften bzw. neugewonnenen Erkenntnisse und Erfahrungen in Astronautik samt verwandten Gebieten gestattet. Eine sehr gediegene und übersichtliche Gestaltung des Buches erleichtert das Studium wie das Nachschlagen der einzelnen Beiträge.

Z. PLASKOWSKI

# Werkstoffkunde der Kerntechnik

Eine Einführung in die Eigenschaften  
und Probleme der Kernreaktorwerkstoffe

Band 19  
Sammlung «Lehr- und Handbücher  
der Ingenieurwissenschaften»

von Dr. W. Epprecht

407 Seiten mit 141 Figuren  
(1961) Ganzleinen Fr./DM 57.50

Titularprofessor an der Eidgenössischen Technischen  
Hochschule in Zürich, Abteilung für Industrielle Forschung  
des Institutes für Technische Physik

## Inhalt:

1. Einführung in die Reaktortechnologie  
Physikalische Grundlagen; Aufbau und Einteilung wichtiger Kernreakortypen
2. Für den Reaktorbau wichtige Eigenschaften der Materialien  
Atomeigenschaften  
Struktur- und Aggregatseigenschaften von kristallinen Festkörpern  
Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase  
Oberflächenreaktionen von Festkörpern mit Gasen und Flüssigkeiten
3. Die Wirkung der Reaktorstrahlungen auf die Materialien  
Natur, Energie und Intensität der in Kernreaktoren auftretenden Strahlungsarten  
Überblick über die Wechselwirkungen zwischen Strahlen und Festkörpern  
Die Störung des Kristallgitters durch Bestrahlung im Kernreaktor und damit verbundene Eigenschafts-  
veränderungen  
Erwärmung von Festkörpern durch Strahlen in Kernreaktoren  
Chemische Wirkungen der Strahlungen in Reaktormaterialien  
Die induzierte Radioaktivität in Reaktormaterialien  
Die Spaltprodukte
4. Übersicht über die Reaktorwerkstoffe  
Spalt- und Brutstoffe; Hüllstoffe für feste Spaltstoffelemente; Moderator- und Reflektormaterialien;  
Kühlmittel; Absorptionsmaterialien; Konstruktionsmaterialien; Abschirmmaterialien

Im vorliegenden Buche wird nach einer kurzen Einleitung in die Technologie der Kernreaktoren eine Einführung in die moderne Theorie der Werkstoffeigenschaften gegeben. Dabei werden im Kapitel 2 anhand von in der Kerntechnik wichtigen Beispielen die Eigenschaften der Atomkerne, der Atomhülle, der Kristalle und vielkristallinen Stoffe besprochen und das für die Technik interessante Verhalten der Metalle, Legierungen, Flüssigkeiten und Gase beleuchtet. Im dritten Kapitel wird die Beeinflussung der Festkörper durch energiereiche Strahlen behandelt, wobei wiederum speziell jene Beispiele hervorgehoben werden, welche für den Reaktorbau von Interesse sind. Das Schlusskapitel gibt einen Überblick über die heute gebräuchlichen Werkstoffe und Kühlmittel von Reaktorkernen. Es wurde absichtlich darauf verzichtet, die Herstellung von Werkstoffen und die Fabrikation wichtiger Konstruktionsteile, zum Beispiel der Spaltstoffelemente, zu behandeln. Das vorliegende Buch soll vielmehr eine gründliche Einarbeit in die Werkstoffprobleme der Kerntechnik ermöglichen und die Stoffeigenschaften sowie deren Ursache und Veränderung unter Bestrahlung nach dem Stande der heutigen Kenntnisse erhellen und beschreiben. Es wendet sich vor allem an Ingenieure, daneben wird jedoch mancher Abschnitt auch Chemiker, Physiker und Metallurgen interessieren, welche auf dem Gebiete der Kerntechnik tätig sind oder sich mit den in ihr auftretenden Problemen vertraut machen möchten.



Birkhäuser Verlag  
Basel und Stuttgart

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung  
Obtainable from your bookseller  
Commandes à votre libraire



*Neuerscheinung*

# Statistische Methoden

für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure

von

ARTHUR LINDER

Professor an der Universität Genf und an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

Dritte, umgearbeitete und stark erweiterte Ausgabe

(1960) 484 Seiten mit 58 Figuren und 73 Beispielen. In Ganzleinen Fr. 54.- (DM 54.-)

Mathematische Reihe, Band 3, Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften»

Angesichts der unvermindert anhaltenden Nachfrage hat sich der Verfasser entschlossen, seine bekannte Einführung in die neueren Methoden der mathematischen Statistik stark zu erweitern. Gleichzeitig wurde der den Anwendungen gewidmete Teil des Buches völlig umgestaltet.

Neu aufgenommen wurden unter anderem: Verschiedene Anwendungen von Chiquadrat, die Streuungszersetzung bei ungleichen Klassenhäufigkeiten, die Bestimmung von Streuungskomponenten, die nichtlineare Regression, die «analysis of covariance», das Schätzen von Parametern und einige Transformationen von Prozentzahlen (Arc sin, Probit, Logit, Loglog).

*1959 erschien vom gleichen Autor:*

## Planen und Auswerten von Versuchen

Eine Einführung für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure

(1959) 2. Auflage, 182 Seiten mit 9 Fig., Ganzleinen Fr./DM 21.-

Reihe der experimentellen Biologie Band 13, Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften»

Diese Einführung richtet sich an Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure; sie setzt keine Kenntnis in mathematischer Statistik voraus. Der Leser wird angeleitet, Versuche richtig zu planen und einwandfrei auszuwerten. Die gründlich durchgearbeiteten Anwendungsbeispiele aus der biologischen, medizinischen, industriellen und landwirtschaftlichen Forschung bilden einen wichtigen Bestandteil des Buches.

*Kürzlich erschien vom gleichen Autor:*

## Handliche Sammlung mathematisch-statistischer Tafeln

(1961) 40 Seiten, Fr./DM 4,50

Die vorliegende Sammlung statistischer Tafeln soll die umfangreicheren, bisher erschienen nicht ersetzen: sie stellt vielmehr einen handlichen Auszug der am meisten verwendeten Tafeln dar, die dazu bestimmt sind, stets griffbereit auf dem Arbeitstisch zu liegen. Ausser den Tafeln von  $t$ ,  $\chi^2$  und  $F$  enthält diese Sammlung Tafeln für die Transformationen von Prozentzahlen mittels Arcus sinus, Probits, Logits und Loglog, sowie Tafeln für zufällig angeordnete Zahlen, die besonders beim Planen von Versuchen und Stichprobenerhebungen zu benutzen sind.

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung - Obtainable from your bookseller*

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTT GART